



# Modélisation mathématique et simulation numérique de l'hydrodynamique : cas des inondations en aval du barrage de Diama

Djamal Moussa Diallo

## ► To cite this version:

Djamal Moussa Diallo. Modélisation mathématique et simulation numérique de l'hydrodynamique : cas des inondations en aval du barrage de Diama. Modélisation et simulation. Université de Franche-Comté, 2010. Français. NNT : . tel-00545770

**HAL Id: tel-00545770**

**<https://theses.hal.science/tel-00545770>**

Submitted on 12 Dec 2010

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Thèse de Doctorat

Spécialité Mathématiques et Applications

présentée par

**Djamal Moussa DIALLO**

pour l'obtention du grade de

Docteur de l'université de Franche-Comté - Besançon

Modélisation mathématique et simulation numérique de  
l'hydrodynamique :  
cas des inondations en aval du barrage de Dama

Thèse dirigée par : M. Jean Marie Crolet, Professeur UFC Besançon

M. Mary Teuw Niane, Professeur UGB Saint-Louis

soutenue le 15 octobre 2010

## Jury :

M. Patrick HILD	PR. Université de Franche-Comté	Président
M. Mohamed EL HATRI	PR. Université de FÈS	Rapporteur
M. Samir AKESBI	MCF(HDR) Université de Mulhouse	Rapporteur
Mme. Mihaela Predoi-Racila	LECTEUR Université de Craiova	Examineur
M. Jean-Marie CROLET	PR. Université de Franche-Comté	Directeur de Thèse
M. Mary Teuw NIANE	PR. Université Gaston Berger de Saint-Louis	Co-directeur de Thèse



*Dédicace**Je dédie ce travail :**À celui qui m'a tout inculqué et indiqué la bonne voie en me rappelant sans cesse que la patience, la volonté et le travail ont toujours fait les grands hommes.**À mon père Moussa Malal DIALLO**À celle qui m'a donné le goût du travail qui ne ménage aucun effort pour ma réussite et à su attendre avec patience les fruits de sa bonne éducation.**À ma mère Hawa Bocar SY**À ceux et celles qui, de leur amour, leur respect et leur dévouement me bercent le cœur.**À mes frères et sœurs*



# Remerciements

Pour commencer, je tiens à remercier vivement mes directeurs de thèse Jean-Marie Crolet et Mary Teuw Niane pour la confiance qu'ils m'ont accordée et l'aide inestimable qui m'a permis de développer mes capacités scientifiques et de réaliser ce travail.

Je présente mes remerciements les plus distingués à M. Patrick Hild pour m'avoir honoré de présider le jury et au-delà même de son oreille attentive qu'il m'a accordée durant cette thèse. Je souhaite aussi remercier Mohamed El Hatri et Samir Akesbi d'avoir rapporté cette thèse et, par leurs commentaires, de m'avoir aidé à l'améliorer. Merci également à Mihaela Predoi-Racila d'avoir fait partie du jury.

Un grand merci également à Dan Calugaru qui m'a énormément apporté tout au long de cette thèse de par nos discussions et au niveau des calculateurs du laboratoire. Lors de mon travail de thèse j'ai eu la chance de rencontrer Mohamed Saïd de l'université de Durham et de partager ses connaissances. Un homme d'une grande écoute et d'une grande disponibilité. Merci Mohamed.

Mon travail n'aurait pas été ce qu'il est sans un homme, en occurrence Boubou Sy, nos nombreuses et intéressantes discussions, sans le partage de son savoir et surtout sans son amitié et son soutien moral constant. Pour tout cela, je lui adresse mes sincères remerciements.

Je remercie également Daniel Le Roux de ses conseils, orientations et surtout pour le temps qu'il m'a toujours accordé avant même le début de cette thèse.

Merci à tous ceux du laboratoire de mathématiques avec qui j'ai partagé ces années aussi bien les membres de l'équipe calcul scientifique, du personnel que les doctorants, je pense en particulier à Alexis mon correcteur, jovial, toujours prêt à faire rire par un mot ou un geste, à Emilie la maman, toujours soucieuse du bien être de ses enfants, elle s'occupe de tout, à Karine la bien vaillante, de bonne humeur toujours et prête à donner son coup de main, à Olivier, à Mohamed, à Mathilde, à Vanessa et Clément. Merci à Richard, à Romain pour leur aide précieuse dans mes différentes sollicitations notamment sur le matériel informatique. Je n'oublie pas les "aînés" Nabile, Nicolas, Jean-Yves, Ulrich et Célestin pour leurs orientations. Un grand merci à Odile Henry qui a accepté de partir

à la recherche des fautes d'orthographe et des erreurs de saisie de ce manuscrit !

Je n'oublie pas non plus Hicham pour son soutien moral, son aide précieuse aux moments difficiles.

Cristina ma compagne de route qui m'a pris la main depuis mes premiers pas, avec qui j'ai fait toute la traversée, sans elle sûrement beaucoup de choses seraient tout simplement impossibles. Merci Tina pour Tout.

Mes sincères remerciements et gratitude s'adressent à tous mes amis(es) et frères et compagnons de route, en particulier Abdoulaye, Abou Backr, Aida, Ayoub, Heinda et Yero pour leur soutien moral et leur amitié, aux deux couples modèles Amadou&Liza et Mohamadou&Magali pour leur disponibilité, leur soutien et leurs encouragements.

Il me tient à coeur de remercier les membres de ma famille, mes parents, frères et soeurs pour leur grand soutien moral, leurs encouragements, leur patience et leur confiance. Un grand merci à mon père et à ma mère pour tout ce qu'ils ont fait pour moi.

A tous je vous dis un seul mot en espérant qu'il sera plus significatif que les phrases : MERCIIII...

# Résumé

Cette thèse est consacrée à la modélisation mathématique et à la simulation numérique des crues dans le delta du fleuve Sénégal. A cette fin, nous nous proposons d'étudier d'une part un couplage  $2D$  et demi ( $2D1/2$ ) et de l'autre un couplage fluide-structure.

Nous considérons l'équation de Navier-Stokes tridimensionnelle et nous faisons l'hypothèse d'une faible épaisseur d'eau, ce qui est acceptable comparé aux dimensions du delta. Cette hypothèse nous permet de faire, en chaque point, une intégration selon la verticale (la topologie du fond du delta est connue) pour obtenir une équation de Saint-Venant bidimensionnelle dans un plan  $xoy$ . Cette équation ne nous permet d'obtenir les champs de vitesses et de pressions que dans un plan horizontal. Pour prendre en compte les apports extérieurs responsables des crues, nous introduisons une équation  $1D$  de conservation de la masse d'eau. Le couplage entre l'équation de Saint-Venant  $2D$  et l'équation de conservation  $1D$  conduit à une modélisation ( $2D1/2$  et non  $3D$ ) du phénomène étudié.

Dans ce travail, nous avons présenté l'étude de ce couplage, l'algorithme informatique correspondant et quelques résultats en particulier celui de l'inondation d'une île située dans le delta. Les résultats obtenus dans cette étude (vitesse, pression et hauteur) ont été utilisés comme entrées dans l'étude de l'élargissement de la brèche.

Cette phase d'élargissement de la brèche résulte de la problématique fluide-structure, une interaction entre un écoulement et une structure fortement déformable. Il s'agit d'un problème multi-physique reposant sur plusieurs équations d'état (Darcy, poro élastique...) et impliquant divers couplages. Sous l'hypothèse que les déformations de la structure dues à l'hydrodynamique restent à échelle microscopique, nous obtenons des résultats analytiques et numériques de l'évolution de l'interface à long terme.

Mots clés : couplage  $2D1/2$ , dérivation Navier-Stokes, Saint-Venant  $2D$ , interaction fluide-structure, Darcy, poro élasticité, hydrodynamique





# Abstract

This thesis is devoted to mathematical modeling and numerical simulation of floods in the delta of the Senegal river. For this purpose, we propose, to study on the one hand a coupling  $2D1/2$  and on the other hand a model of fluid structure interaction

We consider the two-dimensional Navier-Stokes equation and we make the assumption a low thickness, which is acceptable compared to the delta dimension. This assumption enables us to obtain in each point an integration according to the vertical (the topologie of the bottom of the delta is known) to obtain an equation of Saint-Venant two-dimensional in a  $xoy$  plane. This equation allows us to obtain the velocity and pressure fields only in the horizontal plane. To take into account external inputs responsible for flooding, we introduce a  $1D$  equation giving the mass conservation of water. The coupling between these two equations leads to a  $2D\ 1/2$  (and not a  $3D$ ) model of the studied phenomenon.

We present the study of this coupling, the corresponding computer implementation and some results in particular the flooding of an island in the delta. The results (velocity, pressure and height) were used as inputs of the second study, which involves the expanding of the existing gap in the “Langue de Barbarie”.

This phase of enlargement of the gap results from the problematic fluid-structure, in which water interacts with a strongly deformable structure. Under the assumption that the structural deformation due to the hydrodynamics remains on a microscopic scale, we propose a model at the local scale of this fluid-structure interaction by coupling several equations (Saint-Venant, Darcy, poroelastic). We present numerical results of the local evolution of the interface at a long time.

Keyword :  $2D1/2$  coupling, Navier-Stokes derivation, shallow water, fluid-structure interaction, Darcy, poro elasticity, hydrodynamic



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>i</b>
<b>Résumé</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>Table des matières</b>	<b>vii</b>
<b>Table des figures</b>	<b>xi</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>Première partie. Problématique, cadre d'étude et méthodologie</b>	<b>5</b>
<b>1 Problématique et analyse bibliographique</b>	<b>7</b>
1.1 Introduction . . . . .	7
1.2 Position du problème . . . . .	7
1.3 Problèmes d'écoulement . . . . .	9
1.3.1 <b>Problématique de l'inondation</b> . . . . .	10
1.3.2 <b>Simulation déjà réalisée</b> . . . . .	15
1.3.3 <b>État des lieux sur les logiciels existants</b> . . . . .	16
1.4 Conclusion . . . . .	29
<b>2 Regard sur l'approche des modèles utilisés</b>	<b>31</b>
2.1 Introduction . . . . .	31
2.2 Objectifs de la recherche . . . . .	32
2.3 Méthodologie . . . . .	33

2.3.1	Les modèles utilisés . . . . .	33
2.3.1.1	Le modèle bidimensionnel . . . . .	33
2.3.1.2	Modélisation de la composante $z$ de la vitesse : modèle $1D$ . . . . .	34
2.3.2	Les outils utilisés . . . . .	35
2.3.2.1	Les observations à distance . . . . .	35
2.3.2.2	Des observations in situ . . . . .	36
2.4	Conclusion . . . . .	37
<b>Deuxième partie Modélisation mathématique et numérique</b>		<b>39</b>
<b>3</b>	<b>Modélisation Mathématique et Numérique</b>	<b>41</b>
3.1	Introduction . . . . .	41
3.2	Modélisation mathématique . . . . .	41
3.2.1	Équations de Saint-Venant $2D$ . . . . .	41
3.2.1.1	Navier-Stokes $2D$ , incompressibles . . . . .	41
3.2.1.2	Hypothèses de Saint-Venant . . . . .	44
3.2.1.3	Quelques rappels liés à la dérivée d'une intégrale : . . . . .	46
3.2.1.4	Intégration des équations . . . . .	47
3.2.1.5	Modèle de Saint-Venant $2D$ . . . . .	54
3.2.2	L'équation unidirectionnelle suivant $Oz$ . . . . .	54
3.2.3	Conditions aux limites mixtes . . . . .	55
3.3	Algorithme de résolution des équations . . . . .	55
3.3.1	Processus de calcul de la hauteur et des vitesses horizontales . . . . .	55
3.3.1.1	<i>Étape1- Formulation variationnelle et discrétisation par la méthode des éléments finis</i> . . . . .	56
3.3.1.2	<i>Étape2- Calcul de la hauteur et des vitesses horizontales</i> . . . . .	59
3.3.2	Calcul de la composante verticale de la vitesse . . . . .	60
3.3.2.1	<i>Étape3- calcul du débit d'échange dans la troisième équation</i> . . . . .	60
3.4	Simulations numériques du processus d'écoulement . . . . .	63
3.4.1	Résultats et Discussion . . . . .	64
3.4.1.1	Présentation du logiciel DJAMA . . . . .	64
3.4.1.2	Simulation d'un écoulement dans un domaine sans obstacle . . . . .	65

1 <sup>er</sup> cas d'étude . . . . .	65
2 <sup>me</sup> cas d'étude . . . . .	68
3.4.1.3 Simulation d'un écoulement dans un domaine avec obstacle	69
1 <sup>er</sup> cas d'étude . . . . .	71
2 <sup>eme</sup> cas d'étude . . . . .	72
3.4.2 Comparaison des données calculées et des données observées . . . .	73
3.4.2.1 Nature et Provenance des données . . . . .	73
3.4.2.2 Tableaux comparatifs des données calculées et des données observées . . . . .	74
3.5 Conclusion . . . . .	83
<b>Troisième partie. Étude de l'élargissement de la brèche</b>	<b>85</b>
<b>4 Problématique de la brèche</b>	<b>87</b>
4.1 Introduction . . . . .	87
4.2 Nature de la brèche . . . . .	87
4.3 Étude d'impact de l'élargissement de la brèche . . . . .	88
4.4 Études et Simulations déjà réalisées . . . . .	89
4.5 Conclusion . . . . .	89
<b>5 Modélisation et simulation du processus d'élargissement de la brèche</b>	<b>91</b>
5.1 Introduction . . . . .	91
5.2 Modélisation du processus d'élargissement de la brèche . . . . .	93
5.2.1 Détermination du profil . . . . .	93
5.2.2 Étude locale du processus d'érosion . . . . .	93
5.2.2.1 Modélisation et formalisme . . . . .	94
5.2.2.2 Algorithme de résolution du problème fluide-structure . . .	99
5.2.2.3 Formulation faible du problème couplé . . . . .	99
5.2.2.4 Quelles que définitions . . . . .	100
5.2.2.5 Formulation faible dicrète du problème couplé . . . . .	101
5.2.2.6 Algorithme de résolution du problème couplé . . . . .	105
5.2.3 Simulation numérique du problème local . . . . .	106
5.2.4 Retour à l'échelle macroscopique . . . . .	115

5.2.4.1 Le passage du micro au macro . . . . .	115
5.3 Conclusion . . . . .	116
<b>Conclusions et perspectives</b>	<b>117</b>
<b>A Simulation par DJAMA d'une crue</b>	<b>119</b>
A.1 Cas d'un domaine sans obstacle . . . . .	119
A.2 Cas d'un domaine avec obstacle . . . . .	122
<b>B Suivi chronologique de la brèche</b>	<b>125</b>
B.1 Le premier jour . . . . .	125
B.2 Deux jours après . . . . .	126
B.3 Un mois et demi après . . . . .	127
B.4 De décembre à avril . . . . .	127
B.5 Le comportement de la brèche en avril et mai 2004 . . . . .	129
<b>Bibliographie</b>	<b>130</b>

# Table des figures

1	Croquis de localisation du secteur étudié. . . . .	4
1.1	Évolution du débit moyen annuel du fleuve Sénégal à SL en régime naturel depuis 1904, [25] . . . . .	8
1.2	Configuration du tissu urbain de Saint Louis dans l'estuaire du Sénégal . .	11
1.3	Photo : Laurent GERRER, le 4 octobre 2003, vers 8h du matin . . . . .	12
1.4	Photos aériennes au sud de l'île vue de profil . . . . .	14
1.5	RUPRO . . . . .	17
1.6	RUBAR3 . . . . .	18
1.7	CASTOR . . . . .	19
1.8	CASTORDIGUES . . . . .	20
1.9	RUBAR20 . . . . .	21
1.10	MAGE . . . . .	22
1.11	MASCARET . . . . .	23
1.12	MAKE11 . . . . .	24
1.13	MAKE21 . . . . .	25
1.14	MAKE3 . . . . .	26
1.15	MAKEFLOOD . . . . .	27
1.16	HYDRARIV . . . . .	28
2.1	Croquis de localisation du secteur avec brèche. . . . .	34
2.2	Croquis illustrant les échanges entre cellules. . . . .	35
2.3	Vue aérienne dans ces composantes. . . . .	36
2.4	Hydrogramme de la crue 2003 entre la période août à janvier. . . . .	37
3.1	illustration du fond du domaine d'écoulement . . . . .	42



3.2	Description des obstacles du domaine . . . . .	63
3.3	Écran d'interface de DJAMA . . . . .	64
3.4	Écran d'interface de DJAMA avec une crue sans obstacle . . . . .	65
3.5	Simulation d'un écoulement sans obstacle majeur et avec les conditions ( $H = 1$ mètres à $t = 0$ , front 2 mètres) . . . . .	66
3.6	graphe illustrant la simulation de la figure 3.11 . . . . .	66
3.7	Simulation d'un écoulement dans un domaine tri bande : (front 2 mètres) . . . . .	67
3.8	graphe illustrant la simulation de 3.7 . . . . .	68
3.9	Simulation d'un écoulement dans un domaine avec les conditions initiales ( $H = 1.0$ mètres sur DF, à $t = 0$ ) (Front 0.5 mètres) . . . . .	68
3.10	graphe illustrant la simulation de la 3.10 . . . . .	69
3.11	Écran d'interface de DJAMA avec une crue en présence obstacle . . . . .	70
3.12	Champ de vitesse mesuré dans un plan horizontal avec l'obstacle. . . . .	70
3.13	figure19 . . . . .	71
3.14	graphe illustrant la simulation de 3.13 . . . . .	72
3.15	Obstacle de niveau supérieur au niveau du front : ( $H=1$ sur DF à $t=0$ ; front 3.5 mètres) . . . . .	72
3.16	graphe illustrant la simulation de 3.15 . . . . .	73
5.1	figure 24 . . . . .	94
5.2	Configuration locale du domaine fluide-structure . . . . .	95
5.3	Configuration du domaine fluide structure initiale et intermédiaire (resp.) . . . . .	96
5.4	Tableau des constantes . . . . .	97
5.5	Tableau des paramètres . . . . .	99
5.6	Le profil local du champ des vitesses . . . . .	106
5.7	Coupe de la vitesse dans la baie . . . . .	107
5.8	Coupe de la pression dans la baie . . . . .	108
5.9	Flèches dans la structure : champ de vitesses de Darcy . . . . .	109
5.10	Coupe champ de vitesses de Darcy . . . . .	110
5.11	Coupe champ de vitesse de DARCY dans le plan $[xz)$ . . . . .	110
5.12	Coupe de pression dans la structure . . . . .	111
5.13	Coupe déplacement d'un échantillon de la Langue de Barbarie . . . . .	112
5.14	Coupe déplacement du domaine microscopique dans le plan $[xz)$ . . . . .	112

5.15 Coupe densité d'énergie de déformation . . . . .	113
5.16 Iso surface dans la structure dans le plan $[xz)$ . . . . .	113
5.17 Iso surface dans la structure dans le plan $[xz)$ . . . . .	114
5.18 Iso surface dans la structure dans le plan $[xz)$ . . . . .	114
A.1 Simulation d'une crue sans obstacle à $t = 5s$ et $t = 10s$ . . . . .	119
A.2 Simulation d'une crue sans obstacle à $t = 10s$ et $t = 15s$ . . . . .	119
A.3 Simulation d'une crue sans obstacle à $t = 15s$ et $t = 20s$ . . . . .	120
A.4 Simulation d'une crue sans obstacle à $t = 20s$ et $t = 25s$ . . . . .	120
A.5 Simulation d'une crue sans obstacle à $t = 25s$ et $t = 30s$ . . . . .	120
A.6 Simulation d'une crue sans obstacle à $t = 30s$ et $t = 35s$ . . . . .	121
A.7 Simulation d'une crue sans obstacle à $t = 35s$ et $t = 40s$ . . . . .	121
A.8 Simulation d'une crue sans obstacle à $t = 40s$ et $t = 45s$ . . . . .	121
A.9 Simulation d'une crue sans obstacle à $t = 5s$ et $t = 10s$ . . . . .	122
A.10 Simulation d'une crue sans obstacle à $t = 10s$ et $t = 15s$ . . . . .	122
A.11 Simulation d'une crue sans obstacle à $t = 15s$ et $t = 20s$ . . . . .	122
A.12 Simulation d'une crue sans obstacle à $t = 20s$ et $t = 25s$ . . . . .	123
A.13 Simulation d'une crue sans obstacle à $t = 25s$ et $t = 30s$ . . . . .	123
A.14 Simulation d'une crue sans obstacle à $t = 30s$ et $t = 35s$ . . . . .	123
A.15 Simulation d'une crue sans obstacle à $t = 35s$ et $t = 40s$ . . . . .	124
A.16 Simulation d'une crue sans obstacle à $t = 40s$ et $t = 45s$ . . . . .	124
A.17 Simulation d'une crue sans obstacle à $t = 40s$ et $t = 45s$ . . . . .	124
B.1 Quelques minutes après l'ouverture de la brèche. . . . .	125
B.2 La brèche deux jours après l'ouverture. . . . .	126
B.3 La brèche le 24 novembre. . . . .	127
B.4 La brèche de décembre 2003 à avril 2004. . . . .	128
B.5 La brèche au mois d'avril 2004. . . . .	128
B.6 Aspect et dynamique de la brèche en avril et mai 2004. . . . .	129
B.7 L'impact du courant marin sur la brèche. . . . .	130
B.8 Carte bathymétrique de la brèche le 11 juin 2004. . . . .	131



# Introduction

Le delta du fleuve Sénégal est le théâtre de crues importantes, le plus souvent catastrophiques et la dernière en date a nécessité l'ouverture d'une brèche dans la Langue de Barbarie qui est une fine bande de sable séparant le delta du fleuve de la mer. Depuis, cette brèche ne cesse de s'agrandir sous l'action conjuguée des eaux du fleuve et de la mer. Modéliser ce phénomène d'élargissement nécessite de connaître à tout moment les caractéristiques de l'écoulement des eaux dans le delta, y compris en période de crue. Nous avons opté pour la réalisation de deux algorithmes de simulation. C'est ce travail que nous présentons ici.

Nous considérons l'équation de Navier-Stokes tridimensionnelle et nous faisons l'hypothèse d'une faible épaisseur d'eau, ce qui est acceptable comparé aux dimensions du delta. Cette hypothèse nous permet de faire, en chaque point, une intégration selon la verticale (la topologie du fond du delta est connue) pour obtenir une équation de Saint-Venant bidimensionnelle dans un plan  $xoy$  sans les hypothèses approximatives (fond plat ou conditions aux limites trop généreuses dans l'un ou l'autre, qui ne reproduisent pas fidèlement le phénomène étudié). Cette équation ne nous permet d'obtenir les champs de vitesses et de pressions que dans un plan horizontal. Pour prendre en compte les apports extérieurs responsables d'une crue, nous introduisons une équation  $1D$  de conservation de la masse d'eau. Le couplage entre l'équation de Saint-Venant  $2D$  et l'équation de conservation  $1D$  conduit à une modélisation ( $2D1/2$  et non  $3D$ ) du phénomène étudié. Nous verrons que cette nouvelle approche que nous proposons s'avère plus économique que la résolution  $3D$  de Navier-Stokes. Sans être tridimensionnelle, elle est cependant plus performante qu'une méthode bidimensionnelle.

L'objectif est de présenter une méthode numérique conservative formulée en éléments finis pour simuler la problématique des inondations dans la commune de Saint-Louis. Cette méthode utilise un maillage fixe pour la résolution des équations de Saint-Venant

en dimension deux en espace  $2D$  et à la résolution  $1D$  d'une équation de conservation sur la verticale.

Dans ce travail nous présentons l'étude de ce couplage, l'algorithme informatique correspondant et quelques résultats en particulier celui de l'inondation d'une île située dans le delta. Les résultats obtenus dans cette étude (vitesse, pression et hauteur d'eau) sont utilisés comme entrées dans l'étude qui concerne l'élargissement de la brèche. Et dans l'étude de cette dernière, nous allons mettre en œuvre un couplage fluide-structure. La structure est gouvernée par les équations d'élasticité linéaire de par ses petites déformations et de la loi de Darcy du milieu poreux. Pour satisfaire les conditions de continuité des vitesses et d'égalité des contraintes à l'interface nous utiliserons la méthode Lagrangienne-Eulérienne arbitraire "ALE", qui combine l'approche Lagrangienne et l'approche Eulérienne. Nous développons, un second algorithme pour une solution numérique du couplage fluide-structure à l'échelle microscopique pour simuler localement l'érosion de l'interface. À ce titre, plusieurs testes numériques seront présentés.

La modélisation et la simulation numérique que nous proposons ici s'appuient en outre sur des mesures de pluie et de débit récents mais également sur la connaissance (observation, reconstitution...) des événements significatifs plus anciens. La construction du modèle se traduit par la représentation numérique de la topologie et de l'hydrographie du fleuve et de son champ d'inondation et par l'élaboration des méthodes qui permettent de simuler le comportement du fleuve en période de crue.

Au terme des investigations, nous subdivisons le mémoire en 3 parties :

- la première partie est consacrée à la problématique, au cadre d'étude et à la revue bibliographique. Dans cette partie, l'accent est mis sur la dynamique du lit et de son champ d'inondation pour mieux cerner le risque d'inondation dans le site, anticiper les mesures à appliquer et apporter aux décideurs des indications valables sur l'influence que les aménagements projetés auront sur les crues naturelles et même artificielles ;
- la deuxième partie aborde la modélisation mathématique et numérique avec le passage des crues de contrôle pour améliorer le modèle. Dans cette partie, on simule

des crues sans obstacles et en présence d'obstacle avec quelques applications sur des cas réels et variés ;

- la troisième partie étudie le couplage fluide-structure dans le processus d'élargissement de la brèche avec une séparation d'échelles : échelle microscopique et échelle macroscopique. Elle déterminera au niveau local le profil de la dune et insistera davantage sur le processus d'élargissement de la brèche. Dans cette partie l'identification de la nature de la brèche renseigne sur la nature de la rupture même si elle est artificielle, parce qu'on maîtrise ce qui arrive sur elle, et surtout permet de mieux prévoir l'écoulement en aval de la brèche ;
- pour finir, la conclusion résume les principaux résultats et pose quelques perspectives pour mieux orienter les recherches futures.

Pour commencer, la figure 1 ci-dessous, permet de situer la zone ciblée tout au long de cette étude dans le delta du fleuve. À l'issue des travaux relatifs au volet cartographie et topographie, voici un aperçu du domaine : (ADC : Agence du Développement Communale de Saint-Louis).

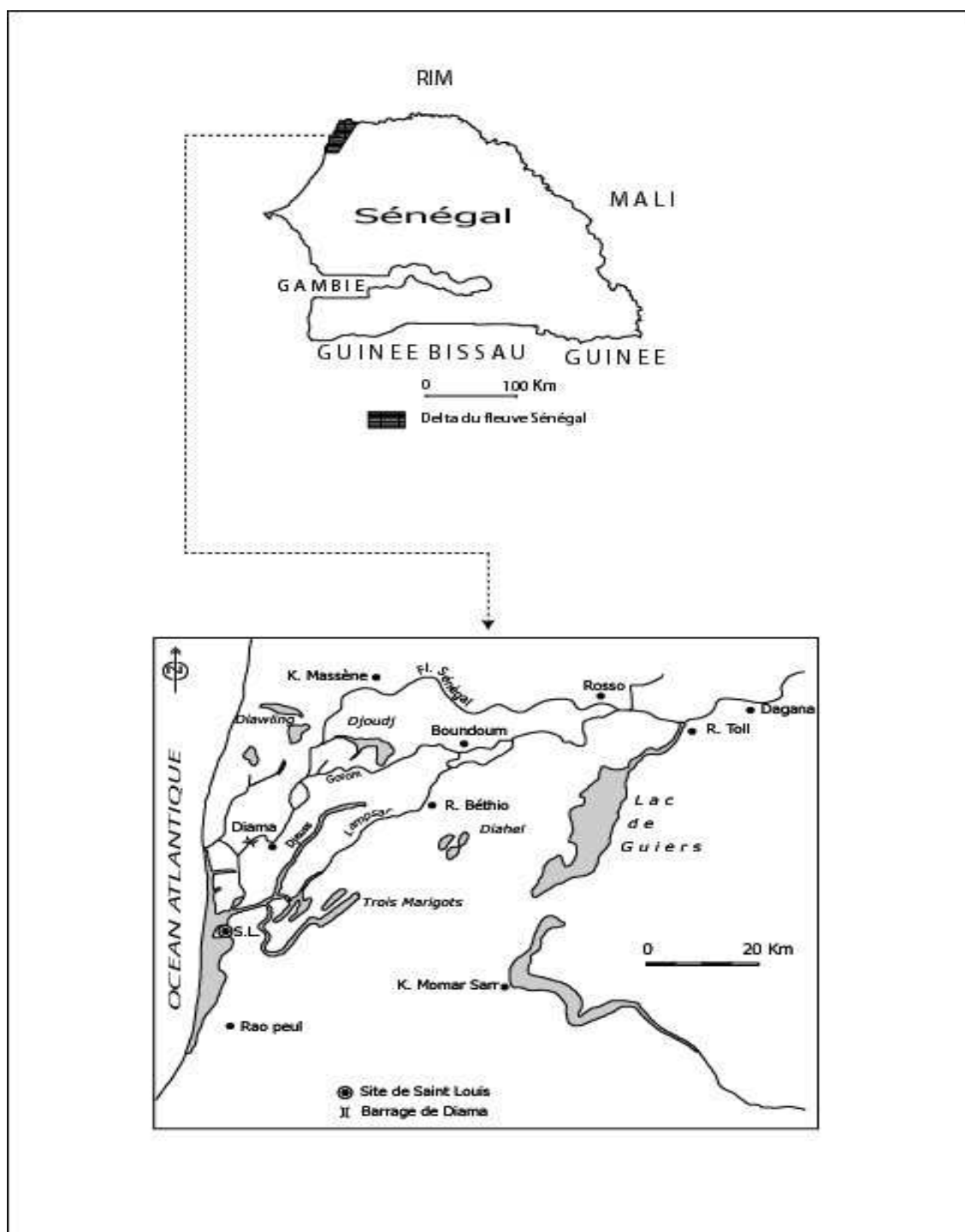


FIG. 1: La localisation du site étudié indique que la ville de Saint Louis se situe entièrement dans l'estuaire du fleuve Sénégal, ce qui justifie toute la problématique des inondations.

# Première partie. Problématique, cadre d'étude et méthodologie

L'enjeu de toute démarche de modélisation est de lire la réalité du phénomène étudié à travers une grille adaptée. Il s'agit de trouver, en fonction d'un objectif choisi, un compromis acceptable entre précision de la description des phénomènes et lourdeur de la mise en œuvre du modèle. Dans la suite, les éléments utiles à la description - dans le cadre et à l'échelle qui nous intéresse - des écoulements dans le lit mineur et dans toute la pleine d'inondable ont été rassemblés et discutés. Cette bibliographie n'est pas exhaustive mais elle n'est pas non plus strictement limitée aux seuls éléments utilisés dans la suite.

Après un exposé sur le fleuve Sénégal, des problèmes d'inondation de la ville de Saint-Louis et de son champ d'inondation, de la brèche de la Langue de Barbarie et de l'embouchure, une présentation succincte des démarches d'étude de la dynamique du lit, nous nous intéressons successivement aux différents éléments nécessaires à l'élaboration d'un modèle d'inondation.





# Chapitre 1

## Problématique et analyse bibliographique

### 1.1 Introduction

La concentration des activités humaines à proximité des cours d'eau justifie les recherches relatives aux problèmes posés par les crues. Les inondations en sont l'expression la plus marquante ; elles sont pourtant indissociables des modifications de la forme du lit, entraînant d'autres désagréments. En effet, la déformation de la géométrie lors des crues influe sur les lignes d'eau et conditionne l'instabilité des ouvrages tels que ponts, digues, seuils, etc. Ces types de situations peuvent mettre en péril les ressources en eau en drainant la nappe phréatique ou en réduisant la capacité des retenues. Dans ce chapitre, une analyse bibliographique cadre le sujet et rassemble les éléments utilisés par la suite. Je présente le problème, dégage le cadre d'étude, donne un aperçu global sur les motivations du sujet, les objectifs et les moyens qui seront mis en œuvre pour atteindre les objectifs fixés.

### 1.2 Position du problème

Né dans le massif de Fouta Djallon en République de Guinée, le fleuve Sénégal se jette dans l'océan Atlantique après quelques 1 770 *km* de parcours. Il est le deuxième grand fleuve d'Afrique de l'ouest après le Niger 4 200 *km*. Son bassin versant fait 337 000 *km*<sup>2</sup> dont 60 000 *km*<sup>2</sup> dans le territoire national du Sénégal. Ses principaux affluents, le Bafing 750 *km*, le Bakoye 562 *km* et la Falémé 625 *km*, prennent leurs sources dans les montagnes de Fouta Djallon. Les autres affluents situés plus en aval comme le Kolimbiné 450 *km* et

le Karakoro 310 *km* sont de moindre importance. Son débit moyen annuel actuel est de l'ordre de 410  $m^3/s$  en moyenne [25].

Le contexte sahélien du bas delta associé à une forte variabilité annuelle des pluies et des écoulements, a toujours favorisé de la part des populations locales des stratégies d'adaptation. Cependant, ces stratégies ajustées tout au long de l'histoire ne peuvent toujours pas répondre ou faire face à une modification régionale durable du contexte climatique. La sécheresse des décennies 1970 et 1980, sur l'ensemble de l'Afrique de l'ouest a favorisé l'émergence de réponses comme les ouvrages hydrauliques.

L'écoulement du fleuve est caractérisé par une forte irrégularité annuelle. Les conditions climatiques particulièrement dures ont entraîné un énorme déficit hydrique dans toute la vallée du fleuve Sénégal. En effet, le niveau des écoulements moyens annuels a connu une baisse très sensible ces dernières années puisque les volumes d'eau écoulés ont diminué de 14 milliards  $m^3/an$  entre 1968 et 1987 [25].

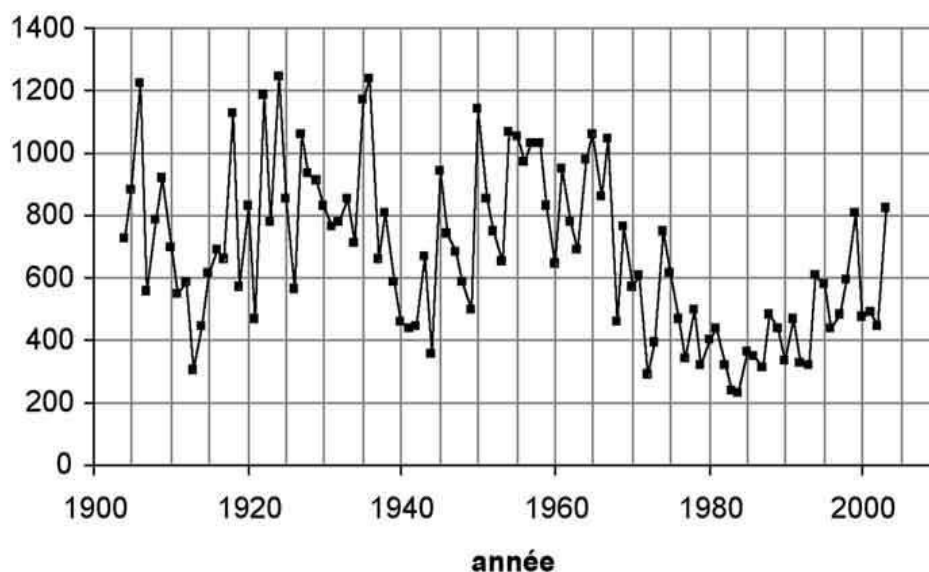


FIG. 1.1: Évolution du débit moyen annuel du fleuve Sénégal à SL en régime naturel depuis 1904, [25]

Devant un tel état de fait et suite aux grandes sécheresses de ces années, les états de la Mauritanie, du Mali et du Sénégal ont créé l'Organisation pour la Mise en Valeur de Fleuve Sénégal (*OMVS*). Les objectifs majeurs de l'OMVS ciblent l'amélioration des

revenus et la croissance économique dans les pays membres et à la modération les impacts des changements brutaux pouvant affecter le niveau de vie des populations rurales. C'est dans ce sens que le barrage anti-sel de Diama et le barrage hydroélectrique de Manantali ont été construits sur le cours principal du fleuve Sénégal respectivement en 1986 et 1988. Le barrage de Diama, implanté dans l'estuaire du fleuve Sénégal, est situé à 26 km en amont de Saint Louis. Il empêche l'intrusion du biseau salé dans le delta et une partie de la moyenne vallée. Une transformation radicale de la vallée du Sénégal s'opère et marque une première rupture avec la construction des barrages de Diama et de Manantali à laquelle il faut associer la mise en eau de diverses infrastructures hydrauliques.

Le fleuve Sénégal longe l'océan atlantique dont il est séparé par un cordon littoral sableux : la Langue de Barbarie (*LB*). Cette *LB* est une longue flèche sableuse fragile et instable, façonnée par le jeu de la dynamique littorale. Son extrémité détermine la position de l'embouchure du fleuve qui délimite la partie aval de notre zone d'étude. Ce cordon est une presqu'île allongée dans le sens nord-sud au sud de Saint Louis sur environ 40 km, constituant une interface entre l'océan et le fleuve Sénégal.

La Langue de Barbarie est mise en place par un courant de dérive qui s'est installé il y a 2 000 ans. Mais l'édification de la flèche de Barbarie ne s'est accélérée qu'à partir des années 1850 ; à cette date les vieilles cartes marines situent l'embouchure à 2,5 km au sud de Saint Louis. Ceci serait probablement lié à la réduction de l'angle d'incidence du courant de dérive par rapport au tracé de la côte. Une telle hypothèse permet d'expliquer l'accumulation par de petites touches de débits solides sur l'extrémité distale du cordon [27].

### 1.3 Problèmes d'écoulement

La crue naturelle laisse place à une crue artificielle, et à une certaine maîtrise des flux et des niveaux du fleuve. Cette rupture est particulièrement inédite de l'aval vers l'amont en ce qui concerne la qualité des eaux, puisque le barrage de Diama bloque désormais la remontée des eaux marines dans le delta et la moyenne vallée. Par ailleurs, la gestion couplée des 2 barrages qui est déjà difficile à établir en elle même, n'intègre pas ou trop peu la préoccupation sécuritaire en aval de Diama et malgré une plus grande maîtrise des flux hydrologiques : la ville de Saint Louis enregistre toujours et davantage des inondations importantes notamment en 1994, en 1999 et en 2003.

### 1.3.1 Problématique de l'inondation

L'ouvrage de Diama limite la partie Nord de notre zone d'étude. Cette partie de la vallée fluviale du bassin (aval de Diama), constitue la partie riveraine du fleuve la plus peuplée sur les 2 000 000 habitants du bassin. La proximité d'un cours d'eau ou des cours d'eau a été toujours considérée comme un avantage certain pour le développement des activités humaines (pêche, agriculture, distribution d'eau potable...). Avec le temps l'homme a appris à composer avec les cours d'eau et leurs caractéristiques hydrauliques. La succession de crues et d'étiages était perçue comme bénéfique. En effet, cette alternance dans le régime hydraulique permettait de façonner les paysages et de fertiliser les terrains environnants.

Cependant, avec le développement rapide des zones urbaines et périurbaines, de l'industrie, du commerce, etc., accompagnées de fortes pressions d'aménagement, il est aujourd'hui fréquent de trouver des communes dont la surface bâtie est aménagée totalement ou en partie installée en zone inondable ; la commune de Saint-Louis en est un exemple [27] figure 3.

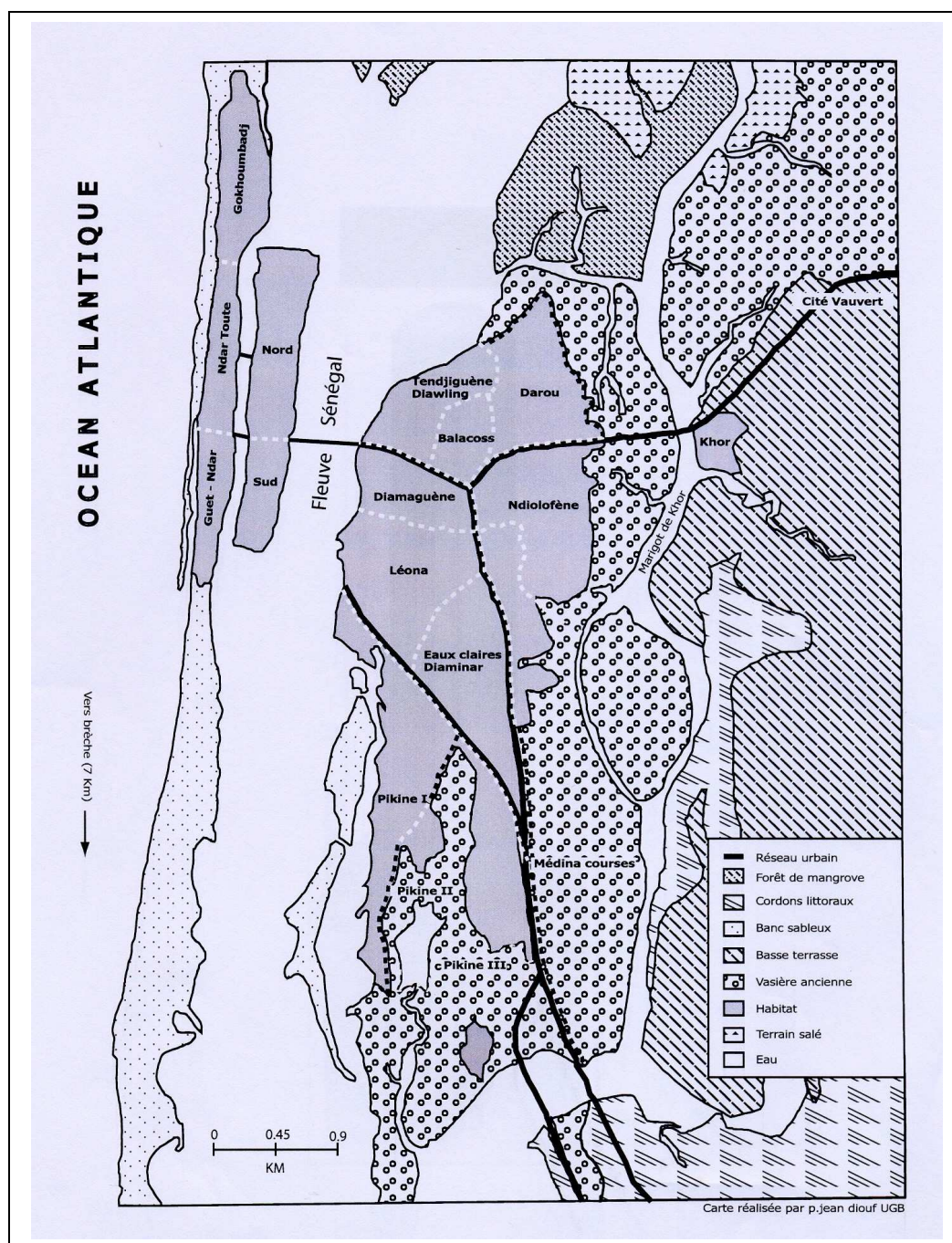


FIG. 1.2: Configuration du tissu urbain de Saint Louis dans l'estuaire du Sénégal

Saint Louis, ville fluviomaritime, coincée entre l'océan, les bras du fleuve et leurs affluents qui forment de nombreuses lanières d'eau ceinturant l'agglomération, est située dans le bas delta. Ce site est caractérisée par la présence de beaucoup de zones inondables qui sont au demeurant des vasières d'anciens défluent du fleuve et de dépressions favo-

rables à la stagnation des eaux pluviales. Paradoxalement la majeure partie de ces zones est occupée par la population à cause d'une urbanisation non contrôlée dont l'incidence est associée aux théories de la production et de l'excédent d'écoulement susceptible de créer des effets négatifs. La pression urbaine a été tellement forte que les autorités n'ont eu le temps de faire des aménagements. L'occupation de ces zones basses inondables autour de la ville s'est produite durant la période de sécheresse. Pendant cette longue période, les faibles crues du fleuve et les rares précipitations n'ont pas suscité le besoin de réaliser des ouvrages de protection.

En 2003, suite à l'exhaussement des plans d'eau consécutif à une bonne pluviométrie enregistrée dans les hauts bassins, la crue du fleuve Sénégal menace d'engendrer une forte inondation sur la ville de Saint Louis. Si l'on admet que la cote IGN d'alerte des inondations de la ville se place autour de 1,25 *m*, déjà à partir du 8 septembre cette cote est dépassée, ce qui correspond assez bien aux observations du terrain. Le niveau de l'eau atteint une cote IGN maximale de 1,43 *m* le 28 septembre, et reste ensuite à 1,41 *m*. Considérant l'ampleur d'une inondation catastrophique imminente et certaine parce que d'autres ondes de crues étaient annoncées dans le haut bassin du fleuve, les autorités ont été poussées à ouvrir une brèche de 4 *m* de largeur, au départ, sur la Langue de Barbarie dans la nuit du 03 au 04 octobre 2003 à 7 *km* de Saint-Louis (figure4).

*Photo* : Laurent GERRER, le 4 octobre 2003, vers 8h du matin



FIG. 1.3: Quelques minutes après l'ouverture de la brèche

Mais les caractéristiques sableuses de ce cordon expliquent sa fragilité face aux facteurs de la dynamique locale : vent, marée, crue, etc.

Il faut rappeler que les processus à la base de ces inondations récurrentes sont généralement de 2 types :

- accumulation des eaux de ruissellement : suite à des précipitations longues, continues et intenses, le sol se sature et de grands volumes d'eau ruissellent. Les remontées de nappes surviennent suite à cette saturation du sol en eau. Il n'est plus possible d'absorber de nouvelles quantités d'eau, ni par apport direct ni par apport indirect (écoulement souterraine, ruissellement à partir des versants) ; ils ont un effet catastrophique sur cette région fortement urbanisée ;

- débordement du fleuve ou inondation fluviale : ils sont les plus redoutables et également les plus dommageables. Ils surviennent suite à de longues périodes de pluie. Ce sont des crues brutales qui s'en suivent. Elles sont soudaines et ont un débit de pointe relativement élevé. Elles sont extrêmement dévastatrices, d'autant plus qu'elles ont une capacité de charriage très importante.

Pour lutter contre ces inondations, ce n'est qu'en 2001, que les autorités nationales ont alors opéré une vaste remise en cause et une introspection de tout leur programme de lutte contre les inondations, en créant une commission nationale de gestion prévisionnelle des inondations. Cette commission, plus connue sous le nom de "*cellule nationale contre les inondations*" est constituée de plusieurs cellules régionales qui ont pour mission de recenser l'ensemble des zones inondables et de procéder à une proposition de solution à la cellule nationale ; l'objectif étant de dresser l'état des lieux des régions concernées par les inondations, favoriser une synergie entre les différents acteurs de la gestion pour chercher une solution à plus ou moins long terme.

La ville de Saint Louis, insuffisamment protégée, est souvent prise au dépourvu. En septembre 2003, lors des fortes inondations, il a été mis sur pied une nouvelle cellule de gestion de crise, qui est chargée notamment de prendre des mesures d'urgence propres à faire face à la situation ; par la construction des déversoirs latéraux et de bassins de retenue en amont des localités menacées. Le traumatisme des inondations a suscité beaucoup de polémique autour de la sécurité de la commune ; d'autant plus que l'ouverture de la brèche



n'a fait qu'accentuer le désarroi de la population locale, argumentant que les bonnes intentions ne seraient pas suivies d'effets concrets.

Devant ce constat, il est indispensable de mettre en œuvre une (des) étude(s) sérieuse(s) pour lutter contre les inondations catastrophiques dont les populations gardent encore les stigmates ou les mêmes scénarios qui se reproduisent inexorablement avec des inondations de plus en plus dramatiques. C'est d'abord le choc des images puis celui du chiffrage des dommages et même du décompte du nombre des victimes qui donnent toute la mesure de l'ampleur de l'événement. Les conséquences de cette catastrophe naturelle sont multiples :

- le danger de pertes de vies humaines ;
- l'impact socio-économique des zones touchées, une paralysie totale ;
- l'impact socio-économique indirect, tout le transport gravitant autour est de plus paralysé.

Des images comme celles-ci, prises durant l'inondation de la ville en 2003 ne sont que trop familières.



FIG. 1.4: Photos aériennes de l'île et de la LB

Ces images montrent que Saint Louis est une ville d'eau (le fleuve et ses bras d'une part et l'océan atlantique de l'autre), d'où la nécessité de maîtriser les hauteurs d'eau dans le site et ses périphéries en rapport avec les pluies qui tombent habituellement dans le bassin versant du Sénégal, voire les apports exceptionnels (photo 3).

En période de pointe de crue, les effets de plusieurs facteurs se conjuguent : la hausse du débit du fleuve, l'écoulement difficile des eaux fluviales à cause de la Langue de Barbarie, la stagnation des eaux pluviales dans les points bas de la ville, la prédominance des eaux du fleuve sur les eaux marines, l'ouverture des vannes de Diama pour protéger le barrage des fortes poussées hydrauliques, la topographie basse du site de la ville et surtout le niveau de la nappe phréatique qui peut remonter jusqu'en surface, etc. Tout cela porte à croire que Saint Louis reste toujours exposé aux risques d'inondations graves.

### 1.3.2 Simulation déjà réalisée

De nombreuses recherches ont été menées sur la modélisation numérique de l'écoulement de cours d'eau. Si les modèles numériques permettent aujourd'hui de traiter une gamme de plus en plus large de problèmes rencontrés dans la nature, certains phénomènes sont encore pris en compte d'une manière très simplifiée. Pour mieux comprendre la dynamique du lit, de la brèche et du champ d'inondation toute approche unidirectionnelle de l'écoulement serait insuffisante et ne saurait par voie de conséquence l'expliquer. L'objet de cette partie est de procéder à un état des lieux des possibilités actuelles.

L'hydraulique fluviale à tout d'abord à sa disposition des modèles très simples à une dimension. Ceux-ci sont généralement utilisés pour modéliser les écoulements ayant une direction privilégiée, possédant une cote de la surface libre constante dans une section en travers et vérifiant un champ de pression hydrostatique. Ils résolvent les équations de Saint- Venant ou de Bernoulli  $1D$  et déterminent pour chaque section la hauteur d'eau et le débit (ou vitesse moyenne). Il existe de nombreux travaux traitant de codes à une seule dimension ; comme par exemple le travail remarquable de thèse (Kane, 2005) pour ne citer que celui-là ; même si l'approche est unidimensionnelle, l'auteur a essayé avec les équations de Saint- Venant, de simuler l'écoulement dans la vallée du fleuve Sénégal. D'autres travaux de simulations sont en cours, mais s'orientant plus sur le transport du soluté, le processus de salinisation ou encore le charriage des débits solides dans les écoulements.

Des codes bidimensionnels plus complexes, résolvent les équations de Saint-Venant  $2D$ . La pression est toujours supposée hydrostatique mais la description est plus précise

puisqu'elle fait intervenir la hauteur d'eau et deux composantes de la vitesse moyenne sur une verticale. La nouveauté du phénomène de la brèche artificielle dans la Langue de Barbarie fait que cet aspect n'est pas suffisamment étudié.

### **1.3.3 État des lieux sur les logiciels existants**

Nous listons ci-après quelques logiciels que nous avons analysés selon plusieurs critères, à savoir :

- les objectifs ;
- la dimension d'espace ;
- les modèles utilisés ;
- les types de résultats attendus ;
- les avantages ;
- les inconvénients.

Tableau 1: RUPRO (rupture de barrage)

Objectifs	Dimension d'espace	Méthode utilisée	Types de résultats	Avantages	Inconvénients
1) Calculer l'hydrogramme au droit d'une brèche de barrage en remblai en terre homogène  2) effectuer un calcul simplifié d'érosion progressive du remblai  3) permettre le calcul du volume qui s'écoule à travers la brèche en fonction du temps et à partir des caractéristiques du tarage d'une retenue	1D sens de l'écoulement	- résolution de l'équation de Bernoulli avec un tirant d'eau critique en condition aval  - les pertes de charge sont soit linéaires (formulation de Manning-Strickler) soit singulières sur le parement amont du remblai  - le débit solide est évalué par une formulation classique (Meyer Peter) à partir des caractéristiques du matériau  Code fortran	- débit au droit de la brèche pour chaque pas de temps	1) l'étude de sensibilité des résultats aux variations des paramètres d'entrées peut être effectuée très facilement.  2) les fichiers sont très manipulables  3) la validation du logiciel a fait l'objet de plusieurs publications	1) dimension d'espace insuffisante car ne permet pas de simuler une crue  2) conditions limites possibles non décrites  3) l'interprétation du modèle est nécessaire pour transposer le cas d'une brèche en aval d'une retenue au cas d'une digue en bordure de lit mineur  4) payant

FIG. 1.5: RUPRO

Ce logiciel du Cemagref, couple un calcul, déterminant les variables hydrauliques moyennes sur la digue à un calcul de transport solide qui suppose l'érosion uniforme dans l'ensemble du barrage. Il permet de simuler deux types de ruptures :

- une érosion par renard, schématisée par une conduite circulaire qui s'élargit progressivement jusqu'à ce que son diamètre atteigne les 2/3 de la hauteur du barrage ; il y a alors effondrement et la brèche devient rectangulaire ;

- une érosion par submersion, la brèche étant supposée rectangulaire ;

elle s'approfondit jusqu'à atteindre le substratum puis s'élargit jusqu'à atteindre la largeur du barrage [30], [31].

Tableau 2: RUBAR 3 (rupture de barrage)

Objectifs	Dimension d'espace	Méthode utilisée	Types de résultats	Avantages	Inconvénients
1) calculer la ligne d'eau pour les écoulements monodimensionnels dans un bief  2) calculer la propagation d'onde de rupture de barrage  3) permettre de simuler tous les types de crues naturel, et particulièrement les crues rapides	modèle filaire 1D	équations de Saint-Venant par une méthode explicite qui utilise un schéma de second ordre (du type VAN-LEER). A chaque pas de temps, le problème de Riemann est résolu de façon approchée grâce à une linéarisation de Roe	- ligne d'eau (hauteur d'eau)	1) couramment utilisé pour le calcul d'onde de rupture de barrage dans le cadre d'établissement des plans d'alerte réglementaire  2) la validation du logiciel a fait l'objet de plusieurs publications	1) dimension d'espace insuffisante car ne permet pas de simuler une crue  2) conditions limites possibles non décrites  3) maillage non raffiné  4) payant

FIG. 1.6: RUBAR3

Le logiciel RUBAR3 permet le calcul de ligne d'eau pour des écoulements monodimensionnels dans un bief. Il est particulièrement adapté aux régimes transitoires rapides avec d'éventuelles alternances de conditions. Son utilisation est limitée aux personnes spécialisées dans la modélisation hydraulique [30]. De plus amples informations peuvent être recueillies sur la page web :

<http://w.w.w.Cemagref.fr/le-cemagref/lorganisation/les-centres/lyon/urhhly/hydraulique-des-rivières/logiciels/rubar3/>

Tableau 3: CASTOR (onde de rupture de barrage)

Objectifs	Dimension d'espace	Méthode utilisée	Types de résultats	Avantages	Inconvénients
1) fournir un ordre de grandeur des valeurs maximales utiles à une évaluation rapide du danger de submersion  2) donner un ordre de grandeur des niveaux d'eau atteints dans une vallée parcourue par une onde de rupture de barrage afin de déterminer si le danger est réel  3) permettre d'estimer certains paramètres en un point en aval du barrage	calcul 1 D simplifié utilisable pour les ondes de rupture instantanées comme progressives	le débit de pointe local  - pour les ondes de rupture instantanée est calculé à l'aide de la formulation de Ritter corrigée par un coefficient qui tient compte de la forme de la retenue (rectangulaire ou trapézoïdale)  - pour la rupture progressive, le débit maximal est calculé par une formule simplifiée d'origine statistique calée sur des observations antérieures (comparaison)  - le débit maximum à chaque point de calcul est déterminé à partir d'un abaque et du débit maximal au droit de la brèche	- débit au droit de la brèche  - débit  - hauteur d'eau  - vitesse en aval	1) les fichiers sont très manipulables  2) la validation du logiciel a fait l'objet de plusieurs publications	1) dimension d'espace insuffisante car ne permet pas de simuler une crue  2) conditions limites possibles non décrites  3) la hauteur d'eau calculée en supposant un régime d'écoulement uniforme  4) payant  5) pas accessible au grand public code en Java et donc machine virtuelle Java nécessaire pour l'exécuter

FIG. 1.7: CASTOR

Ce logiciel de Cemagref, fait un calcul simplifié fondé sur la résolution des équations de Saint-Venant 1D, mais traduit en terme de relation simple entre les variables adimensionnelles. Des renseignements complémentaires sont fournis qui permettent d'estimer le débit maximal du flot, la vitesse maximale ainsi que le temps d'arrivée de l'onde. Il est adapté aux ruptures instantanées aussi bien qu'aux ruptures progressives. C'est outil d'estimation rapide du risque d'inondation à l'aval d'une digue comme son nom l'indique (CAlcul Simplifié pour le Traitement de l'Onde de Rupture de barrage), [32], donne les caractéristiques de l'onde de rupture du barrage en un point d'une vallée. De plus amples informations peuvent être recueillies sur la page web :

<http://w.w.w.Cemagref.fr/le-cemagref/lorganisation/les-centres/lyon/ur-hhly/hydraulique-des-rivières/logiciels/castor/>

Tableau 4 : CASTORDIGUES (rupture de digue)

Objectifs	Dimension d'espace	Méthode utilisée	Types de résultats	Avantages	Inconvénients
<p>1) donner des indications à des ingénieurs ou à des techniciens en charge de la prévention des risques d'inondation quant à l'aléa suite à une rupture de digue</p> <p>2) simuler la rupture d'une digue et calculer les grandeurs hydrauliques qui permettront d'évaluer les risques intéressant la sécurité publique</p> <p>3) simulation simplifiée de l'ensemble du processus de rupture et de propagation en aval de la brèche</p> <p>4) évaluation de l'ensemble du processus du calcul de hauteur d'eau en lit mineur à la propagation en aval de la brèche en passant par la formation de la brèche</p>	modèle 1D dans le lit majeur et zone proche 2D aux environs immédiat de la brèche	<p>- résolution par abaque</p> <p>- formulation de Strickler en régime uniforme</p>	<p>- calcul de la hauteur, la largeur de la brèche ainsi que de la hauteur d'eau à l'aval</p> <p>- calcul du débit liquide à travers la brèche, le débit solide caractérisant l'érosion et l'élargissement de la brèche</p> <p>- la vitesse dans la section du lit mineur où se trouve la brèche</p> <p>- débit maximum en aval de la digue</p>	<p>1) simuler plusieurs brèches en même temps</p> <p>2) les fichiers sont très manipulables</p> <p>3) C'est le premier outil dédié au cas des digues, avec notamment la possibilité de fixer des données d'entrée réalistes à partir d'un lit mineur sans avoir à transposer à partir du cas des barrages</p>	<p>1) conditions limites possibles non décrites</p> <p>2) ne permet pas de caractériser la propagation en aval non immédiat de la brèche (prêt des zones à enjeux zone proche) avec une discrétisation spatiale détaillée</p> <p>3) la topographie, paramètre prépondérant pour la détermination de l'entendue de la zone inondable et la hiérarchisation des temps d'arrivée de l'onde, n'est pas prise en compte localement</p> <p>4) débit repart de manière radiale, ce qui n'est pas nécessairement réaliste selon l'allure du terrain</p> <p>5) payant</p>

FIG. 1.8: CASTORDIGUES

Ce logiciel effectue des calculs simplifiés, diminuant ainsi les temps de calcul et permettant de simuler rapidement de multiples scénarios pour une même étude mais seulement les dimensions d'espace sont insuffisantes car elles ne permettent pas de simuler une crue réelle [32]. De plus amples informations peuvent être recueillies sur la page web :

<http://w.w.w.Cemagref.fr/le-cemagref/lorganisation/les-centres/lyon/ur-hhly/hydraulique-des-rivieres/logiciels/castordigue/>

Tableau 5: RUBAR 20 (rupture de barrage)

Objectifs	Dimension d'espace	Méthode utilisée	Types de résultats	Avantages	Inconvénients
<p>1) permet tout calcul hydraulique à partir des équations de Saint-Venant bidimensionnelles, en particulier, lorsque les variations temporelles des caractéristiques hydrauliques sont importantes (crues par exemple)</p> <p>2) simule des ouvrages hydrauliques pour lesquels la loi d'ouvrage se traduit par une relation entre le débit et les cotes amont et aval (déversoir, vannes, etc.)</p> <p>3) simule la propagation d'une onde de rupture de barrage ou digne de protection ou remblai routier</p>	modèle bidimensionnel Saint-Venant 2D	<p>- volumes finis appliquée à un maillage constitué de quadrilatères et de triangles</p> <p>- à chaque pas de temps pour calculer les flux entrants et sortants de chaque maille, est résolu un problème de Riemann dans la direction normale à l'arrêt</p>	hauteurs, vitesses	<p>1) logiciel robuste et fiable, y compris en présence de discontinuité</p> <p>2) la validation du logiciel a fait l'objet de plusieurs publications</p>	<p>1) la visualisation des résultats s'effectue via un autre logiciel MOCAHY</p> <p>2) conditions limites possibles non décrites</p> <p>3) son utilisation requiert un PC puissant (ou une station de travail)</p> <p>4) payant</p> <p>5) fichiers résultats non accessibles</p>

FIG. 1.9: RUBAR20

Ce logiciel RUBAR 20, a le mérite d'utiliser deux dimensions d'espace. Même s'il requiert une certaine expertise dans la modélisation hydraulique, il intègre plusieurs phénomènes en même temps : simulation de crue, simulation d'une rupture de barrage, un module de transport de sédiments en suspension peut être adjoint au calcul hydrodynamique [33], [34]. De plus amples informations peuvent être recueillies sur la page web :

<http://w.w.w.Cemagref.fr/le-cemagref/lorganisation/les-centres/lyon/ur-hhly/hydraulique-des-rivières/logiciels/rubar20/>



Tableau 6 : **MAGE**

Objectifs	Dimension d'espace	Méthode utilisée	Types de résultats	Avantages	Inconvénients
1) simuler des crues et des zones inondées  2) simuler la gestion des ouvrages d'un réseau hydraulique complexe	Monodimensionnel : 1D Régime d'écoulement transitoire	- équations de Saint-Venant avec la formule de perte de charge de Manning-Strickler  - la discrétisation des équations de Saint-Venant est faite selon un schéma aux différences finies semi implicite à quatre points (schéma de Preissman)	- calcul de la répartition du débit	1) prend en compte la géométrie réelle du lit de la rivière.  2) les fichiers sont très manipulables  3) la validation du logiciel a fait l'objet de plusieurs publications  4) possibilité de l'utilisateur d'inclure au code de bases ses propres routines	1) dimension d'espace insuffisante car ne permet pas de simuler une crue réelle  2) conditions limites possibles non décrites  3) l'interface graphique utilise le « Java Runtime Environment » un langage interprété objet compris que par les spécialistes  4) payant (mais possibilité accordée à une utilisation non commerciale pour les enseignants et les chercheurs)

FIG. 1.10: MAGE

C'est un logiciel de simulation monodimensionnelle d'écoulement en rivière en régime transitoire. Son domaine d'application privilégié est la simulation des crues et des zones inondées. Les équations utilisées sont les équations de Saint-Venant avec la formule de perte de charge de Manning-Strickler. C'est un logiciel pour les spécialistes de la modélisation hydraulique [35]. De plus amples informations peuvent être recueillies sur la page web :

<http://w.w.w.Cemagref.fr/le-cemagref/lorganisation/les-centres/lyon/ur-hhly/hydraulique-des-rivières/logiciels/mage/>

Tableau 7: MASCARET

Objectifs	Dimension d'espace	Méthode utilisée	Types de résultats	Avantages	Inconvénients
- simuler la propagation des ondes de submersion en aval de barrage en particulier sur front initialement sec	modèle filaire 1D	- Saint-Venant monodimensionnel, formulation de Meyer Peter	- débit en aval de la brèche	1) logiciel développé sous assurance qualité 2) maillage très raffiné 3) les fichiers sont très manipulables 4) la validation du logiciel a fait l'objet de plusieurs publications 5) gratuit	1) dimension d'espace insuffisante car ne permet pas de simuler une crue réelle 2) conditions limites possibles non décrites 3) le logiciel ne simule que la surverse : plan du remblai à l'écoulement

FIG. 1.11: MASCARET

Ce logiciel développé depuis plus de 20 ans par EDF R-D et Centre d'Etude Technique Maritimes et Fluviales (CETMEF), est un code de modélisation hydraulique monodimensionnelle à surface libre, basé sur les équations de Saint-Venant. C'est un logiciel qui est composé de trois noyaux de calcul hydrodynamique et permet des calculs en régime fluvial permanent et non permanent ainsi que les transcritiques non permanentes [36]. De plus amples informations peuvent être recueillies sur la page web :

<http://rd.edf.com/edf-fr-accueil/edf-recherche&developpement/logiciels-et-codes/code-mascaret-107043.html>

Tableau 8: **MIKE11**

Objectifs	Dimension d'espace	Méthode utilisée	Types de résultats	Avantages	Inconvénients
1) simuler des processus hydrodynamique, hydrologique, sédimentaire et qualité des eaux  2) déterminer le risque d'inondation et cartographie des champs d'expansion  3) prévenir des crues en temps réel et système d'annonce  4) rupture de barrage et de digue	Modèle unidimensionnel (1 D)	- résolution des équations de Saint-Venant en régime transitoire	par une procédure d'interpolation, réalise automatiquement des cartographies en plan de hauteur d'eau, de débit, de vitesse et de concentration	1) une interface conviviale et performante permet de saisir et de modifier sous forme tabulaire et graphique, les données d'entrées et les paramètres de contrôles  2) les fichiers sont très manipulables  3) la validation du logiciel a fait l'objet de plusieurs publications  4) elle permet de visualiser aussi les résultats d'une simulation sous forme d'animations vues en plan, vues en coupe, profils en long, séries temporelles, courbe de tarage etc.  5) une série de modules complémentaires et d'interactifs permettent d'aborder tous les phénomènes liés à l'hydrologie	1) dimension d'espace insuffisante car ne permet pas de simuler une crue réelle  2) conditions limites possibles non décrites  3) payant

FIG. 1.12: MAKE11

MIKE11 est un outil de simulation unidirectionnelle des processus hydrodynamiques, hydrologiques, sédimentaires et de qualité des eaux. C'est un logiciel particulièrement adapté à des milieux tels que les cours d'eaux, les estuaires et les canaux. C'est un outil de référence dans la gestion de ces milieux. Bien que MIKE 11 soit un modèle unidimensionnel, il permet également, par une procédure d'interpolation sur un MNT, de réaliser automatiquement des cartographies en plan de hauteur d'eau, de vitesse et de concentration. Il reste tout de même limité par rapport à un Modèle 2D1/2 voire 3D. De plus amples informations peuvent être recueillies sur la page web :

<http://w.w.wwdhi.fr/logiciels/RecourcesEnEau/Mike11.aspx>

Tableau 9: **MIKE 21**

Objectifs	Dimension d'espace	Méthode utilisée	Types de résultats	Avantages	Inconvénients
1) simuler l'hydraulique et les phénomènes associés dans les lacs, baies, zones côtières et les océans  2) traiter les problèmes relevant : - hydraulique côtière et océanographie - hydraulique environnementale - processus sédimentaire - houle	Modèle bidimensionnel 2D	pas de précision	pas de précision	1) composer de plusieurs modules spécifiques communiquent entre eux : échange dynamique d'informations  2) les fichiers sont très manipulables  3) la validation du logiciel a fait l'objet de plusieurs publications  4) différents processus à simuler peuvent être ainsi combinés et superposés	1) conditions limites possibles non décrites  2) payant

FIG. 1.13: MAKE21

MIKE21 est un logiciel professionnel de modélisation numérique 2D des écoulements à surface libre. Il permet la simulation de l'hydraulique et des phénomènes associés dans les lacs, baies, zones côtières et les océans. C'est un outil très efficace pour la modélisation en milieu estuarien et côtière parce qu'il offre plusieurs modules d'applications par rapport aux autres modèle 2D existants. De plus amples informations peuvent être recueillies sur la page web : <http://w.w.wwdhi.fr/logiciels/ResourceEnEau/Mike21.aspx>

Tableau 10: **MIKE 3**

Objectifs	Dimension d'espace	Méthode utilisée	Types de résultats	Avantages	Inconvénients
simuler les courants dans des sites complexes, la modélisation de milieux stratifiés, la dispersion d'un rejet présentant une densité différente du milieu récepteur	Modèle tridimensionnel (3D)	les calculs sont effectués sur un maillage - rectangulaire structuré (techniques des différences finies)  - ou triangulaire non structuré (résolution par la technique des volumes finis)	- variation de niveau (hauteur d'eau) - les écoulements (vitesses)	1) Il s'adapte aussi bien à la description des écoulements en milieu fluvial qu'en milieu côtier et offshore  2) les fichiers sont très manipulables  3) la validation du logiciel a fait l'objet de plusieurs publications  4) plusieurs modules communiquent entre eux : échange dynamique d'informations	1) hypothèse : pression hydrostatique  2) conditions limites possibles non décrites  3) payant

FIG. 1.14: MAKE3

MIKE3 est un modèle tridimensionnel pour les calculs hydrodynamiques à surface libre, de houle, de transport sédimentaire et des processus environnementaux. Le module hydrodynamique simule les variations du niveau de la surface libre et des écoulements en fonction des paramètres de forçage dans les milieux aussi variés que les rivières, les lacs, les estuaires, les baies, les zones côtières et le large. De plus amples informations peuvent être recueillies sur la page web : <http://w.w.wwdhi.fr/logiciels/ResourceEnEau/Mike3.aspx>

Tableau 11: **MIKE FLOOD**

Objectifs	Dimension d'espace	Méthode utilisée	Types de résultats	Avantages	Inconvénients
1) simuler des processus hydrodynamique, sédimentaire et de qualité des eaux  2) déterminer : - le risque d'inondation et l'analyse détaillée des champs d'expansion - la rupture de barrage et de digue - la dispersion de polluant et transport de sédiments  3) exploiter la rapidité de calcul et les facilités d'intégration d'ouvrage hydraulique de MIKE 11 pour les écoulements en lit mineur et la précision des calculs de MIKE21 dans les zones les plus vulnérables ou les plaines d'inondations	Couplage 1D/2D	- pas de précision	- vitesse  - hauteur d'eau	1) le logiciel est basé sur le complexe dynamique des logiciels de modélisation MIKE 11 et MIKE 21, il combine les avantages des deux modèles 1D et 2D  2) il offre ainsi à l'utilisateur un maximum de flexibilité et lui permet d'obtenir des modèles optimaux tant sur le point de la précision que sur celui de la rapidité des calculs  3) la description bidimensionnelle offre par ailleurs des possibilités de cartographie automatique	1) conditions limites possibles non décrites  2) payant

FIG. 1.15: MAKEFLOOD

Ce logiciel MIKE FLOOD, est basé sur un couplage dynamique des logiciels de modélisation. Il combine des modèles 1D et 2D, auxquels s'ajoutent les fonctionnalités du couplage comme dans notre cas d'étude. De plus amples informations peuvent être recueillies sur la page web : <http://w.w.wwdhi.fr/logiciels/ResourceEnEau/MIKEFLOOD.aspx>

Tableau 12 : **HYDRARIV**

Objectifs	Dimension d'espace	Méthode utilisée	Types de résultats	Avantages	Inconvénients
1) Comprendre le fonctionnement hydrologique et hydraulique d'un système fluvial, suivre la formation des apports à partir de la pluie, réaliser une étude globale d'aménagement de vallée  2) Évaluer l'impact hydraulique d'aménagements existants et projetés, tels que recalibrages, digues, barrages, aménagements de gravières  3) Cartographier des zones inondables avec report des hauteurs de submersion et du champ de vitesse dans le lit majeur  4) Dimensionner un aménagement ou un ouvrage hydraulique  5) Gérer les ouvrages hydrauliques afin de minimiser les impacts des crues  6) Évaluer l'impact des rejets polluants sur le milieu récepteur ou les mécanismes de sédimentation et d'érosion	Couplage 1D/2D	- la modélisation hydraulique repose sur les équations de Barré de Saint Venant  - leur résolution, fondée sur des algorithmes implicites, s'appuie sur des techniques de sous structuration	- hauteurs de submersion  - champs de vitesse dans le lit majeur	1) plusieurs modules communiquant entre eux  2) La combinaison des trois domaines filaire, casier, bidimensionnel permet d'optimiser chaque modélisation  2) les fichiers sont très manipulables  3) le moteur de calcul HYDRA est développé et utilisé depuis 20 ans	1) conditions limites possibles non décrites  2) payant

FIG. 1.16: HYDRARIV

HYDRARIV est un logiciel très performant, la modélisation hydraulique repose sur les équations de Saint-Venant à une et deux dimensions spatiales. L'interface permet de piloter toutes les tâches de façon interactive lui conférant un grand confort d'utilisation. Les fichiers de modélisation intègrent leur propre base de données comprenant la topologie et toutes les données de paramétrage des scénarii de simulation. De plus amples informations peuvent être recueillies sur la page web :

<http://hydrotecsoft.free.fr/hydrariv-main.ht>

## 1.4 Conclusion

Depuis la fin des années 80, la vallée du fleuve et son delta ont connu des transformations rapides et parfois brutales. La dernière en date est liée à l'ouverture d'une brèche sur la Langue de Barbarie. Cette décision a de multiples impacts qui viennent se superposer aux précédents et rendent toujours incertains les plans de gestion de l'ensemble de ces milieux. La mise au point de modèles numériques peut répondre à ces exigences. Dans la littérature, au travers de cette grille de logiciels qui n'est pas exhaustive, il est clair que certains ont été abordés de façon très simple en privilégiant une direction d'écoulement et par conséquent ne peuvent reproduire le phénomène à l'état naturel. À ce titre, malgré l'accessibilité de certains, comme MASCARET (gratuit), ils restent limités à cause du modèle utilisé (modèle filaire). Par contre, notre modélisation se distingue de ceux en 2D ou 3D robustes par deux aspects principalement, la méthode d'approche et l'accessibilité du produit. Mais tous ont un dénominateur commun : la non accessibilité au grand public à cause du coût parfois exorbitant. On peut en citer d'autres qui sont dans le même registre que les précédents : CANOE, CEDRE, CAREDAS, MIKE FLOOD WATCH... Ces raisons nous ont poussé à mettre à la disposition du public un outil d'aide à la décision pour cette problématique.





## Chapitre 2

# Regard sur l'approche des modèles utilisés

### 2.1 Introduction

L'étude des traitements de flux relève essentiellement de deux types de phénomènes. Le premier type constitue la “fonction Production”. Il concerne les mécanismes de genèses des écoulements. Le deuxième type est la “fonction Transfert”, il est relatif au processus de transport proprement dit, ce qui nous intéresse davantage. Pour cause, c'est à ce type qu'appartient la propagation des crues dans le cours d'eau. Cependant des phénomènes secondaires peuvent perturber de façons importantes l'écoulement, la présence d'irrégularités, l'hétérogénéité des surfaces affectant le frottement, etc. Ils peuvent rendre une certaine complexité au phénomène, surtout dans le cadre de notre milieu naturel.

Pour ces raisons, une meilleure stratégie, une bonne prise en compte des réalités du terrain, et le choix judicieux des modèles appropriés semble être un préalable pour toute étude d'inondation ou de simulation. Après l'étude de la problématique dans le chapitre précédent, il nous faut donc maintenant examiner les modèles utilisés pour calculer l'écoulement du fluide. Nous allons donc, dans ce chapitre, présenter la méthodologie et les modèles mises en œuvre pour l'étude des inondations dans notre domaine.

Que ça soit dans les écoulements côtiers ou de rivières, l'approche dite de Saint-Venant est diversement utilisée pour le calcul des ondes de surfaces et des vitesses. Cette approche met en jeu un fluide en occurrence l'eau limitée par un fond imperméable et une surface libre [37]. Nous rappelons les équations générales de Navier Stokes qui permettent d'ob-

tenir celle-ci par une moyenne sur la hauteur de l'écoulement et le modèle d'écoulement unidirectionnel suivant la direction verticale.

## 2.2 Objectifs de la recherche

La question qui se pose, en dépit de l'ouverture du canal de délestage, est d'identifier le point critique à partir duquel Saint-Louis et ses environs seront de nouveau inondés : existe-t-il une nouvelle cote d'alerte IGN d'inondation du site de la ville après la brèche ?

Déterminer de manière assez précise le devenir sur une longue période de la brèche de la Langue de Barbarie.

La qualité des données permet de dessiner une perspective sur la Langue de Barbarie en tant que site d'accueil d'infrastructures hôtelières, du Parc National de la Langue de Barbarie (PNLB), etc. Ces questions cruciales intéressent beaucoup les autorités locales, nationales et régionales du fait de l'enjeu économique dans la commune de Saint-Louis et particulièrement de la Langue de Barbarie qui prend ses racines dans la terre Mauritanienne. Notre objectif principal dans cette partie est de pouvoir simuler une crue. Pour cela nous devons considérer deux phénomènes : la montée du niveau des eaux et l'inondation des terres. Si le premier phénomène ne pose pas de problème car il est pris en compte directement dans nos équations, il n'est pas de même pour le second car il correspond à un domaine dont la géométrie évolue avec le temps. De plus cette évolution dépend à la fois de la solution mathématique à un instant donné et d'une condition géométrique (le relief du fond). En somme, notre objet par cette recherche est de mettre au point un outil capable de reproduire la propagation des crues dans l'état naturel avec une précision qui soit acceptable car Saint Louis présente beaucoup de potentialités économiques.

Saint Louis demeure actuellement parmi les régions les plus visitées du Sénégal ; la commune doit cette place à son patrimoine architectural et à l'existence d'un réseau important d'aires protégées.

En outre, les activités de la population locale se répartissent entre la pêche et l'agriculture, mais le plus souvent elles allient ces deux activités liées l'eau.

## 2.3 Méthodologie

Le problème ne peut être considéré de manière globale. L'approche doit être locale-événementielle, s'intéresser aux variations topographiques à une échelle très fine. Le lit mineur et la plaine d'inondation sont découpés en mailles qui ne sont pas forcément du même ordre de grandeur. On utilise un maillage triangulaire non structuré. Pour la résolution des équations on privilégie la méthode de Petrov-Galerkin avec des pas de temps réduits.

La méthode  $2D1/2$  adoptée dans ce travail consiste à coupler l'équation de Saint-Venant en dimension deux ( $2D$ ) modélisant l'écoulement dans un plan horizontal et d'une autre équation de conservation de la masse qui renseignera sur la troisième composante de la vitesse. Cette approche est beaucoup plus efficace qu'une méthode  $2D$  parce qu'elle nous donne plus d'information sur l'écoulement d'une part, et puis permet d'éviter le coût élevé en espace mémoire, des calculs complexes tridimensionnels, d'autre part. Dans la simulation de l'écoulement dans la baie, on utilise les lois de parois pour les frontières solides, avec la condition :  $U.n = 0$

### 2.3.1 Les modèles utilisés

#### 2.3.1.1 Le modèle bidimensionnel

On parle de l'écoulement  $3D$  dans le plan  $(x_1, x_2, x_3)$  dans le lit ; la zone inondée [2.1](#) est décrite par son champ vectoriel de vitesse  $U = (u(x_1, x_2, x_3), v(x_1, x_2, x_3), w(x_1, x_2, x_3)) \in \mathbb{R}^3$  et son champ scalaire de pression  $p(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}$ . Ces grandeurs seront déterminées à partir des lois de conservation qui conduisent à l'équation de Navier-Stokes. On suppose les variations de la masse volumique suffisamment faibles pour qu'on puisse utiliser une équation de la continuité sous forme incompressible. On considère le système :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho \partial_t \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} - \text{div}(\sigma(\mathbf{u}, p)) = f & \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \\ \text{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \\ \sigma(\mathbf{u}, p) = -pI_3 + \tau, \quad \tau = \frac{\mu}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) & \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \\ \sigma(\mathbf{u}, p).n = g, & \text{sur } \sum_1 = \Gamma_1 \times ]0, T[ \\ \mathbf{u} = \mathbf{v}, & \text{sur } \sum_2 = \Gamma_0 \times ]0, T[ \end{array} \right.$$

Où  $\Omega$  est considéré comme étant un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ ,  $\mathbf{u}(x) \in \mathbb{R}^3$  est le vecteur vitesse,  $p(x) \in \mathbb{R}$  est la pression,  $\mu(x) \in \mathbb{R}$ , est la viscosité dynamique,  $f(x) \in \mathbb{R}^3$  est la source,  $(\nabla \mathbf{u})_{i,j} = u_{i,j}$  est le gradient de  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}$  est  $u_i \nabla_i u$ . On résout ces équations dans le domaine  $\Omega \times (0, T)$  où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  de frontière régulière  $\partial\Omega$

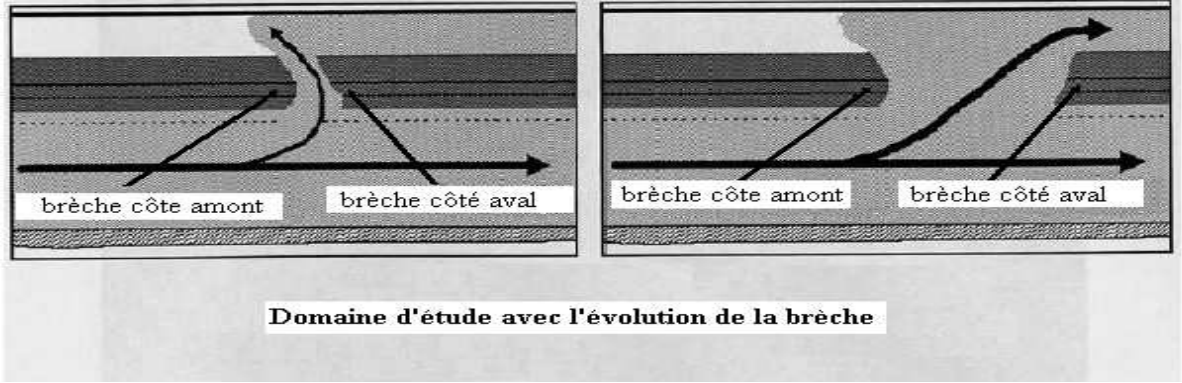


FIG. 2.1: Domaine d'étude avec évolution de la brèche.

La première équation définie dans  $\Omega$  est l'équation de "quantité de mouvement" qui est en fait issue de la relation fondamentale de la dynamique. La deuxième équation, aussi définie dans  $\Omega$ , est l'équation de la continuité qui exprime la conservation de la masse de fluide avec des conditions aux bords mixtes qui seront précisées plus tard. A partir de ce modèle de Navier-Stokes  $3D$ , nous allons nous ramener dans la suite à un modèle de Saint-Venant  $2D$ .

### 2.3.1.2 Modélisation de la composante $z$ de la vitesse : modèle $1D$

Le modèle unidimensionnel  $1D$  permet de résoudre l'équation de conservation des flux et ne dépend que des lois d'échange des débits entre mailles et des lois de volume des mailles et suppose que les écoulements ne peuvent se faire que suivant l'axe  $OZ$  pour déterminer les variations de hauteur d'eau. C'est donc un modèle relativement simple à utiliser. Il est très utile car il sert en réalité à montrer les zones où des problèmes se posent.

L'équation de conservation de la masse sur la verticale se résume par l'expression suivante :

$$A(h) \frac{d(h + \eta)}{dt} = S(t) + \sum_j Q_j$$

où :

- $A(h)$  est la superficie de l'élément à la cote  $h$  ;
- $S(t)$  est le terme source (débit d'eau provenant de la pluie ou de l'évaporation sur la cellule) ;
- $Q_j$  représente les débits d'échange entre les cellules adjacentes comptées positivement lorsqu'il y a apport d'eau dans la cellule  $j$  , ou négativement lorsqu'il y a perte d'eau dans la cellule : ce sont les débits des différentes "liaisons" de la cellule  $j$

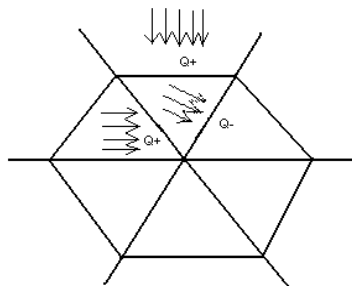


FIG. 2.2: Croquis illustrant les échanges entre cellules.

Il est possible d'écrire autant d'équations de ce type qu'il y a de mailles. On obtient alors un système d'équations différentielles ordinaires de 1er ordre en  $h$ . Il suffit d'imposer les conditions initiales (en occurrence les  $h_0$  puisque les  $Q_0$  seront déterminés dans le modèle  $2D$ , pour être sûr que la solution du système existe et qu'elle est unique).

### 2.3.2 Les outils utilisés

L'étude des crues exige des données relativement précises que seules les équations mathématiques ne suffisent pour expliquer. Ici on s'appuie en outre sur deux sources d'informations potentielles, fondamentales.

#### 2.3.2.1 Les observations à distance

Des vues aériennes du site sont nécessaires pour délimiter les zones urbaines, les structures naturelles et artificielles (structures linéaires majeurs : digues, routes, etc.) et une cartographie détaillée des zones inondées. Ces données sont mises à notre disposition par l'IRD (Institut de Recherches pour le Développement), ACN (*l'Agence de la Cartographie*

*Nationale*), la mairie de Saint Louis dans le cadre du jumelage avec la ville de Lille, dans le cadre de ce travail.

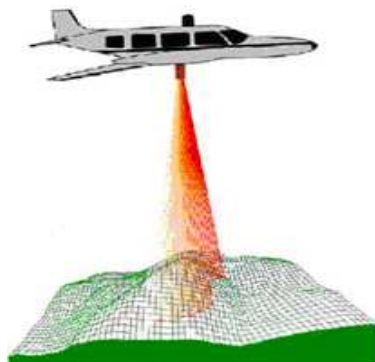


FIG. 2.3: Vue aérienne dans ces composantes.

### 2.3.2.2 Des observations in situ

Ces observations mobilisent des géomètres (mesures et levés de terrains), qui construisent une base de données importantes allant de la limnimétrie aux mesures de débit. La Direction Régionale de l'Hydraulique, l'Organisation pour la Mise en Valeur du Fleuve Sénégal (OMVS), la Direction de la Météorologie Nationale et l'Université Gaston Berger de Saint Louis ont mis une base de données à notre disposition.

#### Remarque

De ces différentes bases, nous disposons des données des crues antérieures fortes comme 1964, 1994, 1999 et 2003 ou des crues faibles 1968, 2000, 2001, 2002. Pour caler notre modèle, nous utilisons les données de la crue 2003. Notre choix s'explique par le fait que c'est la plus critique comme l'illustre l'hydrogramme des crues à la station Saint-Louis entre la période août à janvier fournit par la direction régionale de l'hydraulique. Voir figure.

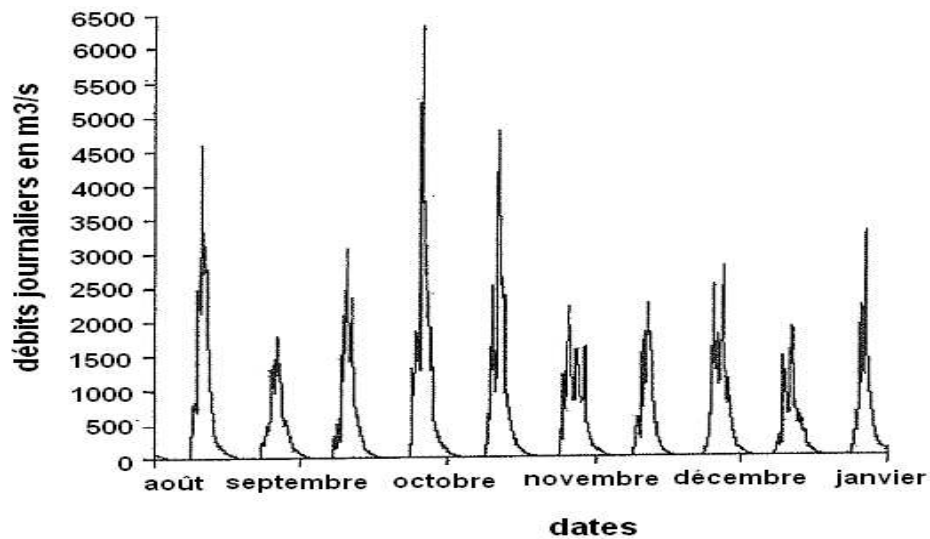


FIG. 2.4: Hydrogramme de la crue 2003 entre la période août à janvier.

## 2.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous proposons des modèles mathématiques, qui sont des outils d'aide à la décision construits à partir de l'analyse des mesures de débit et de hauteurs d'eau en période de crue. Leur élaboration s'appuie en outre sur des mesures de pluie et de débit récents mais également sur la connaissance (observation, reconstitution...) des événements significatifs plus anciens. La variation topographique est calculée par un bilan de 2 équations, une équation de conservation unidirectionnelle en  $z(t)$  et l'équation de Saint-Venant 2D en espace, sur chaque maille afin de suivre l'évolution fine des structures de la zone inondable. Ceci permet donc d'obtenir la hauteur de l'eau, la vitesse d'écoulement et la pression en tout point du maillage. C'est le principe du couplage 2D1/2





## Deuxième partie : Modélisation mathématique, numérique et réglage du modèle

Dans ce travail, on se propose d'étudier la simulation numérique de l'évolution d'un front d'écoulement en cas de forte crue. L'objectif est de présenter une méthode numérique conservative formulée en éléments finis pour simuler cette problématique. Le modèle repose d'une part, sur la dérivation des équations de Navier-Stokes qui aboutira au modèle  $2D$  de Saint-Venant et une deuxième équation  $1D$  qui suppose que les écoulements ne peuvent se faire que parallèlement à l'axe vertical ( $oz$ ). Il fournit des renseignements sur les zones où les problèmes se posent.

Ce modèle couplé  $2D1/2$  utilise un maillage fixe pour la résolution des équations de Saint- Venant en dimension deux en espace  $2D$  et à la résolution  $1D$  d'une équation de conservation sur la verticale ; les inconnues sont la vitesse, la pression, la hauteur de l'eau. De tels écoulements à surface libre apparaissent en particulier dans de nombreuses applications liées à l'environnement tels que les inondations, les avalanches, l'embouchure des rivières etc. Dans cette partie, d'une part, on suivra l'évolution du front dans le domaine dans le cas où il n'y a pas d'obstacle pour deux cas de fronts différents. Et, de l'autre on étudiera la présence de deux cas d'obstacles :

- le cas où le niveau du front d'écoulement est plus grand que l'obstacle ;
- le cas où le niveau du front d'écoulement est plus petit que l'obstacle.

L'approche Eulérienne sera privilégiée en posant les conditions aux limites sur le domaine global et pas sur les domaines intermédiaires. La méthode de Petrov-Galerkin est utilisée pour la discrétisation conduisant à la résolution du problème évolutif. On utilisera

les éléments finis mixte  $P1/P_1^{NC}$  pour la discrétisation spatiale. Le modèle numérique consiste alors à résoudre les équations sur un maillage fixe.

## Chapitre 3

# Modélisation Mathématique et Numérique

### 3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons vu quels sont les modèles et outils nécessaires à la réalisation de cette étude. Dans ce chapitre, il s'agit de calculer les caractéristiques de l'écoulement. Pour se faire, nous mettons en œuvre le couplage des équations proprement dit, les équations de fluides incompressibles, d'une part, l'équation de Saint-Venant et l'équation de la conservation suivant la hauteur du fluide d'autre part.

### 3.2 Modélisation mathématique

#### 3.2.1 Équations de Saint-Venant 2D

Ce paragraphe fait une description plus détaillée de passage du modèle de Navier-Stokes au modèle de Saint-Venant. Après avoir rappelé le modèle de Navier-Stokes et son applicabilité, on décrit, les hypothèses nécessaires à ce passage, pour ensuite passer à une discussion sur le modèle complet de Saint-Venant avant de terminer par la discussion des conditions aux limites pour du modèle.

##### 3.2.1.1 Navier-Stokes 2D, incompressibles

Soit  $\Omega$  le lit du fleuve ( $\Omega = ]0, l_1[ \times ]0, l_2[ \times ]0, l_3[$ ), un ouvert de  $\mathbb{R}^3$ , soit  $T > 0$ . On considère un fluide contenu dans  $\Omega$ . Soient  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  un recouvrement disjoint de la frontière

de  $\Omega$ . On suppose que l'écoulement du fluide incompressible est soumis à un écoulement régi par l'équation de Navier-Stokes. Donc la vitesse d'écoulement  $\mathbf{u}$  et la pression  $p$  du fluide vérifient le système :

$$\begin{cases} \rho \partial_t \mathbf{u} + \rho \mathbf{u} \nabla \mathbf{u} - \operatorname{div}(\sigma(\mathbf{u}, p)) = f & \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \\ \sigma(\mathbf{u}, p) = -pI_3 + \tau, \quad \tau = \frac{\mu}{2}(\nabla \mathbf{u} + \nabla^t \mathbf{u}) & \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \\ \sigma(\mathbf{u}, p) \cdot \mathbf{n} = g, & \text{sur } \sum_1 = \Gamma_1 \times ]0, T[ \\ \mathbf{u} = \mathbf{v}, & \text{sur } \sum_2 = \Gamma_0 \times ]0, T[ \end{cases}$$

Le domaine d'étude  $\Omega$  dans le repère  $(0, x_1, x_2, x_3)$  est limité en bas par le fond dont la surface est donnée par l'équation  $z = z_f(x_1, x_2)$  et en haut par la surface libre d'équation  $z = z_s(x_1, x_2, t)$ .

La pesanteur est dirigée dans le sens des  $z$  négatifs. La hauteur d'eau, ou profondeur sera notée  $h + \eta$  et est égale à  $z_s - z_f$ . Le fond  $\eta$  est donné, c'est la bathymétrie du fleuve. La hauteur d'eau  $h$  est une inconnue :

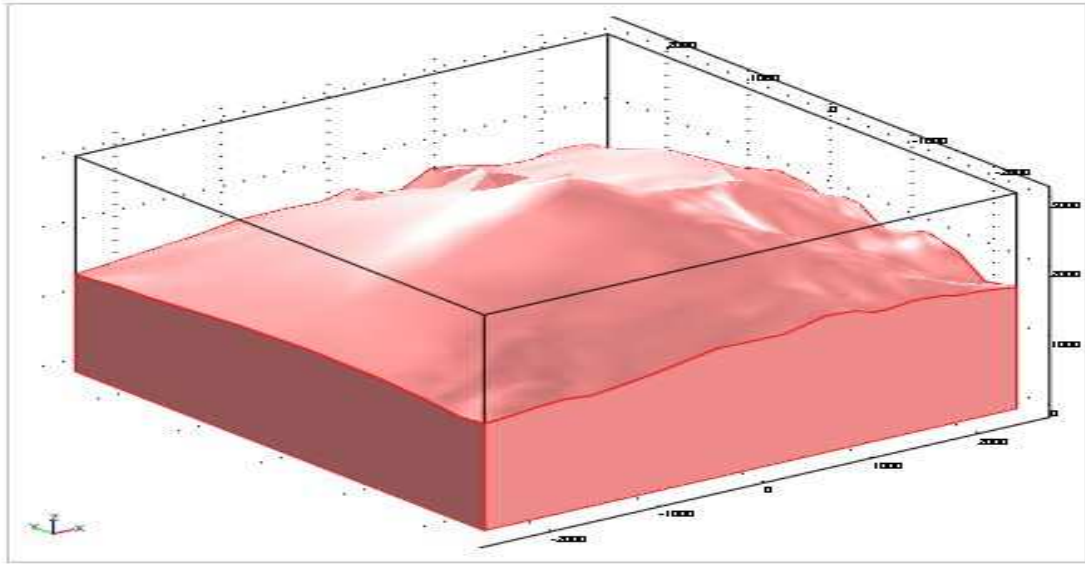


FIG. 3.1: illustration du fond du domaine d'écoulement

### Normales au fond et à la surface libre

Dans toute la suite, on utilise les notations suivantes :

$\partial_1 X = \partial_{x_1} X$ ,  $\partial_2 X = \partial_{x_2} X$ , et  $\partial_3 X = \partial_{x_3} X$  pour désigner respectivement la dérivée de la variable  $X$  suivant la direction  $x_1, x_2$  et  $x_3$  ( $\partial_i X = \frac{\partial X}{\partial x_i}$ )

La surface libre est une fonction univoque des coordonnées  $x_1, x_2$  et varie avec le temps. Son équation  $z$  ci-dessus s'écrit aussi sous la forme  $\phi(x_1, x_2, x_3, t) = 0$  avec

$\phi(x_1, x_2, x_3, t) = z - z_s(x_1, x_2, t)$  et la normale à sa surface libre orientée vers les  $z$  croissants est le vecteur :  $n_s = \text{grad}\phi$ .

Ce vecteur a pour composantes  $(-\partial_1 z_s, -\partial_2 z_s, 1) = (-\partial_1(h + \eta), -\partial_2(h + \eta), 1)$ . La normale au fond  $z_f$  s'exprime de la même façon mais en remplaçant  $z_s$  par  $z_f$ , et avec un signe moins pour une normale extérieure au volume d'eau, soit :  $n_f(\partial_1 z_f, \partial_2 z_f, -1) = (\partial_1 \eta, \partial_2 \eta, -1)$ . Dans la suite, ces vecteurs seront normalisés pour obtenir des vecteurs unitaires. Le fond est une fonction univoque des coordonnées  $x_1, x_2$ .

En projetant sur les différents axes les équations de Navier-Stokes et utilisant les notations ci-dessus on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u_1 + u_i \partial_i u_1 - \frac{1}{\rho} \partial_i \sigma_{i,1}(u, p) = f_1 & \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \\ \partial_t u_2 + u_i \partial_i u_2 - \frac{1}{\rho} \partial_i \sigma_{i,2}(u, p) = f_2 & \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \\ \partial_t u_3 + u_i \partial_i u_3 - \frac{1}{\rho} \partial_i \sigma_{i,3}(u, p) = f_3 & \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \\ \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3 = 0 & \text{dans } \Omega \times ]0, T[ \\ \sigma(u, p) \cdot n = g, & \text{sur } \sum_1 = \Gamma_1 \times ]0, T[ \\ u = v, & \text{sur } \sum_2 = \Gamma_0 \times ]0, T[ \end{array} \right.$$

On effectue une adimensionalisation des variables et des inconnues en les divisant par leurs grandeurs caractéristiques. Dans la suite les variables et inconnues s'entendent sans dimensions, c'est-à-dire :

$$x_1 = \frac{x_1^*}{L}; x_2 = \frac{x_2^*}{L}; x_3 = \frac{x_3^*}{L}; u_1 = \frac{u_1^*}{V_0}; u_2 = \frac{u_2^*}{V_0}; t = \frac{V_0^*}{L}; p = \frac{p^*}{\rho V_0^2}$$

où les variables (\*) sont les grandeurs physiques et  $L$ ,  $V_0$  sont respectivement, les longueurs et vitesses caractéristiques de l'écoulement. Le paramètre de similitude de l'écoulement est le nombre de Reynolds, défini par :

$$Re = \frac{V_0 L}{\nu}$$

En conclusion, l'équation de Navier-Stokes à transformer est constituée par les équations aux dérivées partielles ci-dessus, avec la condition initiale à ( $t = 0$ ) et des conditions aux limites mixtes qui seront précisées plus tard.

### 3.2.1.2 Hypothèses de Saint-Venant

Le passage de ce modèle de départ à celui de Saint-Venant repose sur les hypothèses suivantes :

- la hauteur  $l_3$  est très petit par rapport à la longueur  $l_1$  et à la largeur  $l_2$  ;
- la composante de la vitesse  $u_3$  est très petite par rapport aux composantes  $u_1$  et  $u_2$  ;
- l'écoulement se fait essentiellement dans les directions  $ox$  et  $oy$ , on impose que les forces d'inerties et les contraintes de viscosité dans la direction  $oz$  sont négligeables :  $\frac{d}{dt}u_3 = 0$  et  $\partial_i \tau_{i,3} = 0$ . On en déduit que  $\frac{d^2}{dt^2}u_3 = 0$  ;
- le fluide est soumis à la seule force extérieure qui est la force gravitationnelle. On a  $f_1 = f_2 = 0$  et  $f_3 = -g$  où  $g$  est le module de cette force ;
- $\eta(x_1, x_2)$  la fonction représentant le lit du cours d'eau (bathymétrie du fleuve). Un repère est choisi de sorte que  $\eta$  soit positive ou nulle ;
- $h = h(x_1, x_2, t)$ , la hauteur de l'eau à l'instant  $t$  à la position  $(x_1, x_2)$  du plan horizontal ;
- le lit du fleuve est imperméable ;
- sur la surface libre de l'eau s'exerce une force  $f_s$ , le vent.

Les deux dernières hypothèses conduisent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma(u, p) \cdot n = f, \\ u_p = \left\{ \begin{array}{ll} u_{in} & \text{sur } \sum_{in} \\ u_{out} & \text{sur } \sum_{out} \\ 0 & \text{sur } \sinon \end{array} \right\} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{sur } \sum_1 = \text{surface libre} \\ \text{sur } \sum_0 = \text{paroi} \end{array}$$

Où

$$\sum_1 = (x_1, x_2, h(x_1, x_2, t), t) + \eta(x_1, x_2), (x_1, x_2, t) \in ]0, l_1[ \times ]0, l_2[ \times ]0, T[$$

$$\sum_0 = (x_1, x_2, \eta(x_1, x_2)), (x_1, x_2) \in ]0, l_1[ \times ]0, l_2[$$

Compte tenu de ces hypothèses, le système de Navier-Stokes devient alors :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u_1 + u_1 \partial_1 u_1 + u_2 \partial_2 u_1 - \frac{1}{\rho} \partial_i \sigma_{i,1}(u, p) = 0 & \text{dans } Q \\ \partial_t u_2 + u_1 \partial_1 u_2 + u_2 \partial_2 u_2 - \frac{1}{\rho} \partial_i \sigma_{i,2}(u, p) = 0 & \text{dans } Q \\ \frac{1}{\rho} \partial_3 p = -g & \text{dans } Q \\ \partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3 = 0 & \text{dans } Q \\ \sigma(u, p) \cdot n = f_s, & \text{sur } \sum_1 \\ u_p = \left\{ \begin{array}{ll} u_{in} & \text{sur } \sum_{in} \\ u_{out} & \text{sur } \sum_{out} \\ 0 & \text{sur } \sinon \end{array} \right\} & \text{sur } \sum_0 \end{array} \right.$$

### Remarque

On rappelle qu'on a supposé que la vitesse verticale est nulle. Il vient donc de l'équation 3 du dernier système que la pression n'est soumise qu'au poids de la colonne d'eau au point de coordonnées  $(x_1, x_2, x_3)$ .

La pression s'écrit alors :  $p(x_1, x_2, x_3, t) = -gx_3 + cst(x_1, x_2, t)$  où  $cst(x_1, x_2, t)$  est une constante d'intégration qui se simplifiera avec l'expression de la pression atmosphérique. Sachant que la pression à la surface libre de l'eau est égale à la pression atmosphérique,  $p_{atm}$ , donc



on a :

$$p_{atm} = -g(h(x_1, x_2, t) + \eta(x_1, x_2)) + cst(x_1, x_2, t)$$

On en déduit par conséquent :

$$p(x_1, x_2, x_3, t) = g(h(x_1, x_2) + \eta(x_1, x_2) - x_3) + p_{atm}$$

### 3.2.1.3 Quelques rappels liés à la dérivée d'une intégrale :

La dérivée d'une intégrale à bord variable ou dépendant d'un paramètre fait apparaître une dérivée à l'intérieur de l'intégrale et des termes de flux suivant la relation :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \int_{z_f}^{z_s} F(x_1, x_2, s) dx_3 = \int_{z_f}^{z_s} \frac{\partial F}{\partial x_1} dx_3 + F(x_1, x_2, z_s) \frac{\partial z_s}{\partial x_1} - F(x_1, x_2, z_f) \frac{\partial z_f}{\partial x_1}$$

Si l'on pose :  $f = \frac{1}{h} \int_{z_f}^{z_s} F dx_3$ , on dit que  $f$  représente la moyenne de  $F$  sur la verticale.

En appliquant la formule à des dérivées par rapport à  $x_1, x_2, x_3$  on a :

$$\vec{grad}(hf) = \int_{z_f}^{z_s} \vec{grad}(F) dx_3 - F(x_1, x_2, z_s) \vec{n}_s - F(x_1, x_2, z_f) \vec{n}_f$$

où  $\vec{n}_s$  et  $\vec{n}_f$  sont, rappelons le, des vecteurs qui sont unitaires, orienté vers le haut pour le premier, vers le bas pour le second. On trouvera de même pour un vecteur :

$$div(hf) = \int_{z_f}^{z_s} div(\vec{F}) dx_3 - F(x_1, x_2, z_s) n_s - F(x_1, x_2, z_f) n_f$$

Pour une dérivée en temps et en tenant compte du fait que :

$$\frac{\partial z_s}{\partial t} - \vec{u}^s \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial z_f}{\partial t} - \vec{u}^f \cdot \vec{n}_f = 0$$

On obtient :

$$\frac{\partial(hf)}{\partial t} = \int_{z_f}^{z_s} \frac{\partial f}{\partial t} - F(x_1, x_2, z_s) \vec{u}^s \vec{n}_s - F(x_1, x_2, z_f) \vec{u}^f \vec{n}_f$$

### 3.2.1.4 Intégration des équations

Le principe des équations de Saint-Venant  $2D$  consiste à intégrer le système ci-dessus sur la hauteur du fluide en chaque  $(x_1, x_2)$  fixé du système précédent.

$$\text{soit } S(x_1, x_2, t) = \left\{ (\bar{x}, t) \in \bar{Q}, 0 \leq x_3 \leq h(x_1, x_2, t) + \eta(x_1, x_2) \right\}$$

Pour  $(x_1, x_2, t)$  fixé, on intègre l'équation de conservation de la masse entre  $\eta(x_1, x_2)$  et  $h(x_1, x_2) + \eta(x_1, x_2)$ . Dans la suite sauf mention contraire, ces quantités seront remplacées respectivement par  $\eta$  et  $h + \eta$

On obtient :

$$\int_{\eta}^{h+\eta} \partial_3 u_3 dx_3 = \int_{\eta}^{h+\eta} (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) dx_3$$

d'où

$$u_3(x_1, x_2, h + \eta, t) - u_3(x_1, x_2, \eta, t) = - \int_{\eta}^{h+\eta} (\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2) dx_3$$

Or la vitesse verticale correspond à la dérivée de la hauteur i.e :

$$u_3(x_1, x_2, h + \eta, t) = \frac{d}{dt}(h + \eta)$$

En outre la formule d'intégration donne :

$$\begin{aligned} \int_{\eta}^{h+\eta} \partial_1 u_1 dx_3 &= \partial_1 \int_{\eta}^{h+\eta} u_1 dx_3 - \partial_1(h + \eta) u_1(x_1, x_2, h + \eta, t) + \partial_1 \eta u_1 \Big|_{x_3=\eta} \\ \int_{\eta}^{h+\eta} \partial_2 u_2 dx_3 &= \partial_2 \int_{\eta}^{h+\eta} u_2 dx_3 - \partial_2(h + \eta) u_2(x_1, x_2, h + \eta, t) + \partial_2 \eta u_2 \Big|_{x_3=\eta} \end{aligned}$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(h + \eta) &= u_3(x_1, x_2, \eta, t) - \partial_1 \int_{\eta}^{h+\eta} u_1 dx_3 + \partial_1(h + \eta)u_1(x_1, x_2, h + \eta, t) \\ &\quad - \partial_1 \eta u_1 \Big|_{x_3=\eta} + \partial_2 \int_{\eta}^{h+\eta} u_2 dx_3 + \partial_2(h + \eta)u_2(x_1, x_2, h + \eta, t) - \partial_2 \eta u_2 \Big|_{x_3=\eta} \end{aligned} \quad (3.1)$$

Or en utilisant la définition de la dérivée particulaire on a :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(h + \eta) &= \frac{\partial(h + \eta)}{\partial t} + u_1(x_1, x_2, h + \eta, t)\partial_1(h + \eta) \\ &\quad + u_2(x_1, x_2, h + \eta, t)\partial_2(h + \eta) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Pour la suite, on travaille avec la moyenne de la vitesse horizontale  $(u, v)$  sur la hauteur du fluide.

$$u(x_1, x_2, t) = \frac{1}{h} \int_{\eta}^{h+\eta} u_1 dx_3 \quad v(x_1, x_2, t) = \frac{1}{h} \int_{\eta}^{h+\eta} u_2 dx_3$$

En égalisant 3.1 et 3.2 ci-dessus, il vient :

$$\frac{\partial(h + \eta)}{\partial t} + \partial_1(hu) + \partial_2(hv) = u_3(x_1, x_2, \eta, t) - \partial_1 \eta u_1(x_1, x_2, \eta, t) - \partial_2 \eta u_2(x_1, x_2, \eta, t) \quad (3.3)$$

et

$$\frac{\partial(h)}{\partial t} + \partial_1(hu) + \partial_2(hv) = u_3(x_1, x_2, \eta, t) - \partial_1 \eta u_1(x_1, x_2, \eta, t) - \partial_2 \eta u_2(x_1, x_2, \eta, t) \quad (3.4)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial(h)}{\partial t} + \partial_1(hu) + \partial_2(hv) = -\sqrt{1 + |\nabla \eta|^2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} \quad (3.5)$$

En utilisant la condition  $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ , on a :

$$\Rightarrow \frac{\partial(h)}{\partial t} + \partial_1(hu) + \partial_2(hv) = 0 \quad (3.6)$$

Intégrons maintenant le système d'équilibre suivant :

$$\begin{aligned}\partial_t u_1 + u_1 \partial_1 u_1 + u_2 \partial_2 u_1 - \frac{1}{\rho} \partial_i \sigma_{i,1}(u, p) &= 0 \text{ dans } Q \\ \partial_t u_2 + u_1 \partial_1 u_2 + u_2 \partial_2 u_2 - \frac{1}{\rho} \partial_i \sigma_{i,2}(u, p) &= 0 \text{ dans } Q\end{aligned}$$

On obtient :

$$\begin{aligned}\int_{\eta}^{h+\eta} \partial_t u_1 dx_3 + \int_{\eta}^{h+\eta} u_1 \partial_1 u_1 dx_3 + \int_{\eta}^{h+\eta} u_2 \partial_2 u_1 dx_3 - \frac{1}{\rho} \int_{\eta}^{h+\eta} \partial_i \sigma_{i,1}(u, p) dx_3 &= 0 \quad \text{dans } Q \\ \int_{\eta}^{h+\eta} \partial_t u_2 dx_3 + \int_{\eta}^{h+\eta} u_1 \partial_1 u_2 dx_3 + \int_{\eta}^{h+\eta} u_2 \partial_2 u_2 dx_3 - \frac{1}{\rho} \int_{\eta}^{h+\eta} \partial_i \sigma_{i,2}(u, p) dx_3 &= 0 \quad \text{dans } Q\end{aligned}$$

Pour une meilleure lisibilité nous allons effectuer les calculs terme par terme dans chacune des égalités :

**Intégration de :**  $\partial_t u_1$  et  $\partial_t u_2$

$$\begin{aligned}\int_{\eta}^{h+\eta} \partial_t u_1 dx_3 &= \partial_t \int_{\eta}^{h+\eta} u_1 dx_3 - \partial_t h u_1 \Big|_{x_3=h+\eta} \\ \int_{\eta}^{h+\eta} \partial_t u_2 dx_3 &= \partial_t \int_{\eta}^{h+\eta} u_2 dx_3 - \partial_t h u_2 \Big|_{x_3=h+\eta}\end{aligned}$$

On note  $c_1, c_2$  les coefficients de corrections de la vitesse moyenne à la surface libre du fluide, et tenant compte de l'équation 3.6 on a :

$$\begin{aligned}\int_{\eta}^{h+\eta} \partial_t u_1 dx_3 &= \partial_t(hu) + c_1 u (\partial_1(hu) + \partial_2(hv)) \\ \int_{\eta}^{h+\eta} \partial_t u_2 dx_3 &= \partial_t(hu) + c_2 v (\partial_1(hu) + \partial_2(hv))\end{aligned}$$

**Intégration de :**  $u_1 \partial_1 u_1$

$$\begin{aligned}\int_{\eta}^{h+\eta} u_1 \partial_1 u_1 dx_3 &= u \int_{\eta}^{h+\eta} \partial_1 u_1 dx_3 \\ &\approx u (\partial_1 \int_{\eta}^{h+\eta} u_1 dx_3 - \partial_1(h+\eta) u_1 \Big|_{x_3=h+\eta} + \partial_1 \eta u_1 \Big|_{x_3=\eta}) \\ &\approx u (\partial_1(hu) - c_1 u \partial_1(h+\eta) + \partial_1 \eta u_1 \Big|_{x_3=\eta})\end{aligned}$$

*Intégration de :  $u_2 \partial_2 u_1$*

$$\begin{aligned}
 \int_{\eta}^{h+\eta} u_2 \partial_2 u_1 dx_3 &= v \int_{\eta}^{h+\eta} \partial_2 u_1 dx_3 \\
 &\approx v \left( \partial_2 \int_{\eta}^{h+\eta} u_1 dx_3 - \partial_2(h+\eta) u_1 \Big|_{x_3=h+\eta} + \partial_2 \eta u_1 \Big|_{x_3=\eta} \right) \\
 &\approx v \left( \partial_2(hv) - c_1 u \partial_2(h+\eta) + \partial_2 \eta u_1 \Big|_{x_3=\eta} \right)
 \end{aligned}$$

*Intégration de :  $u_1 \partial_1 u_2$*

$$\begin{aligned}
 \int_{\eta}^{h+\eta} u_1 \partial_1 u_2 dx_3 &= u \int_{\eta}^{h+\eta} \partial_1 u_2 dx_3 \\
 &\approx u \left( \partial_1 \int_{\eta}^{h+\eta} u_2 dx_3 - \partial_1(h+\eta) u_2 \Big|_{x_3=h+\eta} + \partial_1 \eta u_2 \Big|_{x_3=\eta} \right) \\
 &\approx u \left( \partial_1(hv) - c_2 v \partial_1(h+\eta) + \partial_1 \eta u_2 \Big|_{x_3=\eta} \right)
 \end{aligned}$$

*Intégration de :  $u_2 \partial_2 u_2$*

$$\begin{aligned}
 \int_{\eta}^{h+\eta} u_2 \partial_2 u_2 dx_3 &= v \int_{\eta}^{h+\eta} \partial_2 u_2 dx_3 \\
 &\approx v \left( \partial_2 \int_{\eta}^{h+\eta} u_2 dx_3 - \partial_2(h+\eta) u_2 \Big|_{x_3=h+\eta} + \partial_2 \eta u_2 \Big|_{x_3=\eta} \right) \\
 &\approx v \left( \partial_1(hu) - c_2 u \partial_2(h+\eta) + \partial_2 \eta u_2 \Big|_{x_3=\eta} \right)
 \end{aligned}$$

*Intégration de :  $\partial_3 \sigma_{31}(u, p)$*

$$\int_{\eta}^{h+\eta} \partial_3 dx_3 = \sigma_{31}(u, p) \Big|_{x_3=h+\eta} - \sigma_{31}(u, p) \Big|_{x_3=\eta}$$

**Intégration de :**  $\partial_1 \sigma_{11}(u, p)$

$$\begin{aligned}
\int_{\eta}^{h+\eta} \partial_1 \sigma_{11}(u, p) dx_3 &= \partial_1 \int_{\eta}^{h+\eta} \sigma_{11}(u, p) dx_3 - \partial_1(h + \eta) \sigma_{11}(u, p) \Big|_{x_3=h+\eta} \\
&\quad + \partial_1 \eta \sigma_{11}(u, p) \Big|_{x_3=\eta} \\
&= \partial_1 \int_{\eta}^{h+\eta} (-p + \mu \partial_1 u_1) dx_3 - \partial_1(h + \eta) \sigma_{11}(u, p) \Big|_{x_3=h+\eta} \\
&\quad + \partial_1 \eta \sigma_{11}(u, p) \Big|_{x_3=\eta} \\
&\approx \partial_1 \int_{\eta}^{h+\eta} (g(h + \eta - x_3) + p_{atm}) dx_3 + \mu \partial_1 (\partial_1(hu) - c_1 u \partial_1(h + \eta) \\
&\quad + \partial_1 \eta u_1 \Big|_{x_3=\eta}) - \partial_1(h + \eta) \sigma_{11}(u, p) \Big|_{x_3=h+\eta} + \partial_1 \eta \sigma_{11}(u, p) \Big|_{x_3=\eta} \\
&\approx \frac{g}{2} \partial_1 h^2 - p_{atm} \partial_1 h + \mu \partial_1 h + \mu \partial_1 (\partial_1(hu) - c_1 u \partial_1(h + \eta)) \\
&\quad + \partial_1 \eta u_1 \Big|_{x_3=\eta}) - \partial_1(h + \eta) \sigma_{11}(u, p) \Big|_{x_3=h+\eta} + \partial_1 \eta \sigma_{11}(u, p) \Big|_{x_3=\eta}
\end{aligned}$$

**Intégration de :**  $\partial_1 \sigma_{12}(u, p)$

$$\begin{aligned}
\int_{\eta}^{h+\eta} \partial_1 \sigma_{12}(u, p) dx_3 &= \partial_1 \int_{\eta}^{h+\eta} \sigma_{12}(u, p) dx_3 - \partial_1(h + \eta) \sigma_{12}(u, p) \Big|_{x_3=h+\eta} + \partial_1 \eta \sigma_{12}(u, p) \Big|_{x_3=\eta} \\
&\approx \frac{\mu}{2} \partial_1 (\partial_1(hv) - c_2 v \partial_1(h + \eta) + \partial_1 \eta u_2 \Big|_{x_3=\eta}) + \frac{\mu}{2} \partial_1 (\partial_2(hu) \\
&\quad - c_2 u \partial_2(h + \eta) + \partial_1 \eta u_1 \Big|_{x_3=\eta}) - \partial_1(h + \eta) \sigma_{12}(u, p) \Big|_{x_3=h+\eta} \\
&\quad + \partial_1 \eta \sigma_{12}(u, p) \Big|_{x_3=\eta}
\end{aligned}$$

**Intégration de :**  $\partial_2 \sigma_{21}(u, p)$

$$\begin{aligned}
\int_{\eta}^{h+\eta} \partial_2 \sigma_{21}(u, p) dx_3 &= \partial_2 \int_{\eta}^{h+\eta} \sigma_{21}(u, p) dx_3 - \partial_2(h + \eta) \sigma_{21}(u, p) \Big|_{x_3=h+\eta} + \partial_2 \eta \sigma_{21}(u, p) \Big|_{x_3=\eta} \\
&\approx \frac{\mu}{2} \partial_2 (\partial_1(hv) - c_2 v \partial_1(h + \eta) + \partial_1 \eta u_2 \Big|_{x_3=\eta}) \\
&\quad + \frac{\mu}{2} \partial_2 (\partial_2(hu) - c_1 u \partial_2(h + \eta) + \partial_2 \eta u_1 \Big|_{x_3=\eta}) \\
&\quad - \partial_2(h + \eta) \sigma_{21}(u, p) \Big|_{x_3=h+\eta} + \partial_2 \eta \sigma_{21}(u, p) \Big|_{x_3=\eta}
\end{aligned}$$

*Intégration de :  $\partial_2 \sigma_{22}(u, p)$*

$$\begin{aligned}
\int_{\eta}^{h+\eta} \partial_2 \sigma_{22}(u, p) dx_3 &= \partial_2 \int_{\eta}^{h+\eta} \sigma_{22}(u, p) dx_3 - \partial_2(h + \eta) \sigma_{22}(u, p) \Big|_{x_3=h+\eta} \\
&\quad + \partial_2 \eta \sigma_{22}(u, p) \Big|_{x_3=\eta} \\
&= \partial_2 \int_{\eta}^{h+\eta} (-p + \mu \partial_2 u_2) dx_3 - \partial_2(h + \eta) \sigma_{22}(u, p) \Big|_{x_3=h+\eta} \\
&\quad + \partial_2 \eta \sigma_{22}(u, p) \Big|_{x_3=\eta} \\
&\approx \partial_2 \int_{\eta}^{h+\eta} (-g(h + \eta - x_3) + p_{atm}) dx_3 + \mu \partial_2 (\partial_2(hu) - c_2 v \partial_2(h + \eta) \\
&\quad + \partial_2 \eta u_2 \Big|_{x_3=\eta}) - \partial_2(h + \eta) \sigma_{22}(u, p) \Big|_{x_3=h+\eta} + \partial_2 \eta \sigma_{22}(u, p) \Big|_{x_3=\eta} \\
&\approx -\frac{g}{2} \partial_2 h^2 - p_{atm} \partial_2 h + \mu \partial_2 h + \mu \partial_2 (\partial_2(hv) - c_1 v \partial_1(h + \eta)) \\
&\quad + \partial_1 \eta u_2 \Big|_{x_3=\eta}) - \partial_2(h + \eta) \sigma_{22}(u, p) \Big|_{x_3=h+\eta} + \partial_2 \eta \sigma_{22}(u, p) \Big|_{x_3=\eta}
\end{aligned}$$

En utilisant les différents résultats obtenus la première équation du système d'équilibre s'écrit :

$$\begin{aligned}
&\partial_t(hu) + c_1 u (\partial_1(hu) + \partial_2(hv)) + u (\partial_1(hu) - c_1 u \partial_1(h + \eta) + \partial_1 \eta u_1 \Big|_{x_3=\eta}) + v (\partial_2(hu) \\
&\quad - c_1 u \partial_2(h + \eta) + \partial_2 \eta u_1 \Big|_{x_3=\eta}) + \frac{g}{2} \partial_1 h^2 + p_{atm} \partial_1 h - \mu \partial_1 h - \mu \partial_1 (\partial_1(hu) - c_1 u \partial_1(h + \eta) \\
&\quad + \partial_1 \eta u_1 \Big|_{x_3=\eta}) + \partial_1(h + \eta) \sigma_{11}(u, p) \Big|_{x_3=h+\eta} - \partial_1 \eta \sigma_{11}(u, p) \Big|_{x_3=\eta} - \frac{\mu}{2} \partial_2 (\partial_1(hv) \\
&\quad - c_2 v \partial_1(h + \eta) + \partial_1 \eta u_2 \Big|_{x_3=\eta}) - \frac{\mu}{2} \partial_2 (\partial_2(hu) - c_1 u \partial_2(h + \eta) + \partial_1 \eta u_1 \Big|_{x_3=\eta}) \\
&\quad + \partial_2(h + \eta) \sigma_{21}(u, p) \Big|_{x_3=h+\eta} - \partial_2 \eta \sigma_{22}(u, p) \Big|_{x_3=\eta} - \sigma_{31}(u, p) \Big|_{x_3=\eta} + \sigma_{31}(u, p) \Big|_{x_3=\eta} = 0
\end{aligned} \tag{3.7}$$

la seconde équation du système d'équilibre s'écrit :

$$\begin{aligned}
&\partial_t(hv) + c_1 v (\partial_1(hu) + \partial_2(hv)) + v (\partial_1(hv) - c_2 v \partial_1(h + \eta) + \partial_2 \eta u_1 \Big|_{x_3=\eta}) + v (\partial_2(hv) \\
&\quad - c_1 v \partial_2(h + \eta) + \partial_2 \eta u_1 \Big|_{x_3=\eta}) + \frac{g}{2} \partial_1 h^2 + p_{atm} \partial_2 h - \mu \partial_2 h - \mu \partial_2 (\partial_2(hv) - c_2 v \partial_2(h + \eta) \\
&\quad + \partial_2 \eta u_1 \Big|_{x_3=\eta}) + \partial_2(h + \eta) \sigma_{22}(u, p) \Big|_{x_3=h+\eta} - \partial_2 \eta \sigma_{22}(u, p) \Big|_{x_3=\eta} - \frac{\mu}{2} \partial_1 (\partial_1(hv) \\
&\quad - c_2 v \partial_1(h + \eta) + \partial_1 \eta u_2 \Big|_{x_3=\eta}) - \frac{\mu}{2} \partial_1 (\partial_2(hu) - c_1 u \partial_2(h + \eta) + \partial_2 \eta u_1 \Big|_{x_3=\eta}) \\
&\quad + \partial_1(h + \eta) \sigma_{12}(u, p) \Big|_{x_3=h+\eta} - \partial_2 \eta \sigma_{12}(u, p) \Big|_{x_3=\eta} - \sigma_{32}(u, p) \Big|_{x_3=\eta} + \sigma_{32}(u, p) \Big|_{x_3=\eta} = 0
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Les équations 3.6, 3.7, 3.8 constituent le système de Saint-Venant 2D dans sa forme complète. Du fait que ce système d'équations n'a pas de solution analytique connue, il est nécessaire d'utiliser des méthodes numériques pour sa résolution. Cela implique des besoins importants au niveau du calcul, et l'on peut avoir intérêt à introduire des simplifications dans le système, quitte à avoir d'autres contraintes théoriques, en plus des hypothèses de Saint-Venant. Pour se faire, nous ferons quelques hypothèses supplémentaires pour adapter ces équations à l'étude qui nous intéresse.

Les normales respectives à la surface libre et à la paroi  $n_s$  et  $n_p$  sont données par :

$$n_s = \frac{1}{\sqrt{|\nabla(h+\eta)|^2 + 1}}(-\partial_1(h+\eta), -\partial_2(h+\eta), 1)^T, \quad n_p = \frac{1}{\sqrt{|\nabla\eta|^2 + 1}}(-\partial_1\eta, -\partial_2\eta, -1)^T$$

La condition de friction de Navier-Stokes est vérifiée au niveau de la paroi, i.e :

$$\tau n_p = k(u_1, u_2, u_3)$$

Tenant compte de la force du vent  $f_s$  appliquée à la surface libre du fluide, on a :  $\sigma.n_s = f_s$

La simplification que nous faisons consiste à négliger les termes quadratiques en vitesse ou ses dérivées. Cette simplification additionnelle revient à dire, que les forces de frottement, de gravité et pression sont dominantes dans la description du phénomène de propagation. On arrive alors au modèle de Saint-Venant, décrit par l'expression suivante : Le système de Saint-Venant 2D s'écrit alors :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_1(hu) + \partial_2(hv) & = 0 \\ \partial_t(hu) + (gh + p_{atm})\partial_1(h + \eta) & = \sqrt{|\nabla + \eta|^2 + 1}f_s^1 + \sqrt{|\nabla\eta|^2 + 1}ku_1 \Big|_{x_3=\eta} \\ \partial_t(hv) + (gh + p_{atm})\partial_2(h + \eta) & = \sqrt{|\nabla + \eta|^2 + 1}f_s^2 + \sqrt{|\nabla\eta|^2 + 1}ku_2 \Big|_{x_3=\eta} \end{cases}$$

On introduit des coefficients de correction  $cc_1$  et  $cc_2$  de la vitesse sur la paroi, i.e :

$$u_1 \Big|_{x_3=\eta} = cc_1 u \quad \text{et} \quad u_2 \Big|_{x_3=\eta} = cc_2 v$$

Et les notations  $hu = q_1$ ,  $hv = q_2$ ,  $\tilde{k}_1 = kcc_1$ ,  $\tilde{k}_2 = kcc_2$



### 3.2.1.5 Modèle de Saint-Venant 2D

On établit ainsi dans la section ci-dessus un système d'équation de conservation simplifiées des classiques équations de Saint-Venant décrivant la dynamique d'un écoulement lorsque l'échelle spatial de ses variations dans les directions longitudinale  $x$  et transversale  $y$  est grande devant la longueur caractéristique dans la direction verticale  $z$ , d'épaisseur  $h + \eta$ .

Dans ces conditions le modèle de Saint-Venant 2D simplifié que nous résolvons s'écrit finalement en formulation débit hauteur :

$$\begin{cases} \partial_t h + \partial_1 q_1 + \partial_2 q_2 & = 0 \\ \partial_t q_1 + (gh + p_{atm})\partial_1(h + \eta) & = \sqrt{|\nabla + \eta|^2 + 1}f_s^1 + \sqrt{|\nabla\eta|^2 + 1}\tilde{k}\frac{q_1}{h} \\ \partial_t q_2 + (gh + p_{atm})\partial_2(h + \eta) & = \sqrt{|\nabla + \eta|^2 + 1}f_s^2 + \sqrt{|\nabla\eta|^2 + 1}\tilde{k}\frac{q_2}{h} \end{cases}$$

Nous pouvons maintenant compléter ce système par des conditions au bord sur  $q = (q_1, q_2)$  et les conditions initiales sur  $(q, h)$ . L'écoulement 2D, dans le plan  $(x_1, x_2)$  du fluide de masse volumique  $\rho$  constante est complètement décrit par son champ vectoriel de vitesse  $q = (q_1(x_1, x_2), q_2(x_1, x_2)) \in \mathbb{R}^2$  et son champ scalaire de pression  $p(x_1, x_2) \in \mathbb{R}$ . Ces grandeurs seront déterminées à partir de ce système.

### 3.2.2 L'équation unidirectionnelle suivant $Oz$

L'écoulement 1D, suivant l'axe  $(Oz)$  de l'équation de conservation est décrit par une relation supplémentaire. La variation de la hauteur dans une maille  $j$  que multiplie la surface de cette maille  $A(h)$  à la hauteur  $h$  n'est rien d'autre que la source dans cette dernière augmentée de la somme des débits d'échange entre la maille  $j$  et les mailles adjacentes à  $j$ . Cette équation permet de récupérer la troisième composante de la vitesse qui n'était pas prise en compte dans le système de Saint-Venant.

$$A(h)\frac{d(h + \eta)}{dt} = S(t) + \sum_j q_j$$

#### Remarque sur le couplage

Pour réaliser ce couplage, la résolution des équations de Saint-Venant, nous permet de

recupérer le débit d'échange entre les mailles qui sera injecté dans l'équation de conservation. La résolution de cette dernière donnera la composante verticale de la vitesse du fluide en chaque point du maillage en tenant compte des apports et des pertes dans les cellules.

### 3.2.3 Conditions aux limites mixtes

Pour tous les cas étudiés, on considère des conditions aux limites mixtes. La partie du bord supérieur par lequel le flux arrive est notée  $\Gamma_0^{in}$  et donc de vitesse non nulle, une autre en aval de vitesse non nulle également  $\Gamma_0^{out}$  le reste de la frontière  $\Gamma_0$  qui est constituée par les bords latéraux et la surface du fond est de vitesse nulle.  $\Gamma_2$  est la surface libre du fluide, la vitesse sur cette frontière peut être non nulle s'il y a apport d'eau (pluie), nulle sinon, ce qui se traduit par :

$$\left\{ \begin{array}{l} q \cdot n = q_n; \quad q_n = \begin{cases} q_{in} & \text{sur } \Gamma_0^{in} \\ q_{out} & \text{sur } \Gamma_0^{out} \\ 0 & \text{sur } \textit{sinon} \end{cases} \\ h(x_1, x_2, 0) = h^0(x_1, x_2); \quad q(x_1, x_2, 0) = q^0(x_1, x_2) \end{array} \right.$$

## 3.3 Algorithme de résolution des équations

Pour réaliser le couplage  $2D1/2$ , on décrit dans ce paragraphe les différentes étapes de calcul afin de simuler le processus d'écoulement.

### 3.3.1 Processus de calcul de la hauteur et des vitesses horizontales

Dans ce qui suit nous allons parler de la formulation en éléments finis du problème. Ce modèle élément finis que nous considérons résout les équations par approximation numérique. On recouvre le domaine par un nombre fini d'éléments en utilisant des points nodaux situés aux extrémités des éléments. Le principe est de minimiser l'énergie dans l'ensemble des fonctions.

Soit  $T$  un nombre strictement positif. On considère la partition de l'intervalle  $[0, T]$  en intervalle  $[t_n, t_{n+1}]$  tels que  $0 < t_n < T$ , 
$$\begin{cases} \forall n = 1, \dots, N \\ t_0 = 0 \quad \text{et} \quad t_N = T \end{cases}$$

On définit trois suites de fonctions,  $q_{1n}^k$ ,  $q_{2n}^k$ ,  $h_n^k$  telles que  $x \longrightarrow (q_{1n}(x))_n$  ( $q_{1n} \approx q(\cdot, t^n)$ ), avec les initialisations  $q_{1,0} = q_1$ ,  $q_{2,0} = q_2$  et  $h_0 = h^0$ .

Soit  $\Omega_h = \bigcup_j K_j$  une discrétisation de notre domaine d'étude  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  par des triangles, soit  $\varepsilon(K_j)$  l'ensemble des cotés des triangles  $K_j$ , enfin soit  $(a^i)_1^N$  les sommets de la discrétisation. Soit  $V_h$  l'ensemble des fonctions affines continues de notre discrétisation

$$V_h = \{\psi : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}, \psi_h \in C^0(\Omega_h) : \forall K_j \in \Omega_h, \psi_h|_{K_j} \in P^1\}$$

En plus on introduit les notations suivantes :

$$(a, b) = \int_{\Omega_h} a_i b_i \quad a, b \in (L^2(\omega_h))^2, \quad (A, B) = \int_{\Omega_h} A_{i,j} B_{i,j} \quad A, B \in (L^2(\omega_h))^{2 \times 2}$$

### 3.3.1.1 Étape1- Formulation variationnelle et discrétisation par la méthode des éléments finis

Soient  $W_{0n} = \{\varphi \in V_n, \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_{PL}\}$  et  $J_{0nk} = \{\psi \in V_n^2, \psi = 0 \text{ sur } \Gamma_{PL}\}$  Soient  $\{\varphi\}_{1 \dots N}$  une base de  $W_{0n} = \{\varphi \in V_n, \varphi = 0 \text{ sur } \Gamma_{PL}\}$  et  $\{\psi_i\}_{1 \dots N}$  une base de  $J_{0nk}$  définie par  $\psi_{i,j} = \psi_i e_j$  ou  $j = 1, 2$  et  $\{e_j\}$  la base canonique de  $\mathbb{R}^2$ .

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t h_n \varphi dx - \int_{\Omega} q \cdot \nabla \varphi dx &= - \int_{\Gamma} q_{nor} \varphi d\Gamma \\ \int_{\Omega} \partial_t q_{1n} \psi dx + g \int_{\Omega} h \partial_1 (h_n + \eta) \psi dx &= \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla(h_n + \eta)|^2 + 1} f_s^1 \psi dx + \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla \eta|^2 + 1} \tilde{k} \frac{q_{1n}}{h_n} \psi dx \\ \int_{\Omega} \partial_t q_{2n} \psi dx + g \int_{\Omega} h \partial_2 (h_n + \eta) \psi dx &= \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla(h_n + \eta)|^2 + 1} f_s^2 \psi dx + \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla \eta|^2 + 1} \tilde{k} \frac{q_{2n}}{h_n} \psi dx \end{aligned}$$

Pour calculer les solutions de ce système ci-dessus, on utilise deux types d'éléments différents : les éléments conformes et les éléments non conformes. On considère un maillage  $T_h$  du domaine  $\Omega$ . Pour calculer la pression  $h$ , on utilise les fonctions de bases classiques de l'élément  $P_1$ , i.e continues et affines par morceaux, que l'on note  $\varphi_i$ . Et pour calculer les composantes de la vitesse on utilise les fonctions des bases de l'élément  $P_1$  non conforme,

$P_1^{NC}$ , discontinues au niveau des arêtes des triangles et se déduisant des  $\varphi_i$  par la relation  $\psi_i = 1 - 2\varphi_i$ . Si une fonction de base  $\varphi$  est liée aux nœuds  $a_i$ , on en déduit  $\psi_i$  est liée à  $\tilde{a}_i$  milieu de l'arête opposée à  $a_i$ .

Donc la pression sera calculée au niveau des sommets des triangles et la vitesse au niveau des milieux des arêtes. Soit  $na$  et  $ns$  respectivement le nombre d'arêtes et le nombre de sommets de la triangulation. On suppose que :

$$q = \sum_{i=1}^{na} q_i \psi_i, \quad h = \sum_{i=1}^{ns} h_i \varphi_i$$

On a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \partial_t h \varphi_i dx - \int_{\Omega} q \cdot \nabla \varphi_i dx &= - \int_{\Gamma} q_n \varphi_i d\Gamma \\ \int_{\Omega} \partial_t q_1 \psi_i dx + g \int_{\Omega} h \partial_1 h \psi_i dx + g \int_{\Omega} \partial_1 \eta h \psi_i dx &= \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla(h + \eta)|^2 + 1} f_s^1 \psi_i dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla \eta|^2 + 1} \tilde{k} \frac{q_1}{h} \psi_i dx \\ \int_{\Omega} \partial_t q_2 \psi_i dx + g \int_{\Omega} h \partial_2 h \psi_i dx + g \int_{\Omega} h \partial_2 \eta h \psi_i dx &= \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla(h + \eta)|^2 + 1} f_s^2 \psi_i dx \\ &\quad + \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla \eta|^2 + 1} \tilde{k} \frac{q_2}{h} \psi_i dx \end{aligned}$$

La décomposition des fonctions  $(q^k, h^k)$  suivant les bases conduit à :

$$q^k = \sum_{i=1}^{na} q_i^k \psi_i, \quad h^k = \sum_{i=1}^{ns} h_i^k \varphi_i$$

La solution discrète à l'instant  $k \nabla t$ , où  $\nabla t$  est le pas de temps. Soit  $0 < \alpha, \theta < 1$ . En utilisant une formulation explicite en temps, on obtient la formulation de Petrov-Galerkin suivante :

Trouver  $h_n^{k+1}, q_{1n}^{k+1}, q_{2n}^{k+1}$ , tel que  $\forall \varphi_i \in W_{0n}, \forall \psi_i \in J_{0nk}$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{h^{k+1} - h^k}{\nabla t} \varphi_i dx - (1 - \alpha) \int_{\Omega} q^{k+1} \cdot \nabla \varphi_i dx + \alpha \int_{\Omega} q^k \cdot \nabla \varphi_i dx \\
& \quad = - \int_{\Gamma} q_n^k \varphi_i d\Gamma \\
& \int_{\Omega} \frac{q_1^{k+1} - q_1^k}{\nabla t} \psi_i dx + (1 - \theta) g \int_{\Omega} h^k \partial_1 h^{k+1} \psi_i dx + \theta g \int_{\Omega} h^k \partial_1 h^k \psi_i dx + g \int_{\Omega} \partial_1 \eta h^k \psi_i dx \\
& \quad = \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla(h^k + \eta)|^2 + 1} f_s^{1k} \psi_i dx + (1 - \beta) \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla \eta|^2 + 1} \tilde{k}_1 \frac{q_1^{k+1}}{h^k} \psi_i dx \\
& \quad \quad + \beta \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla \eta|^2 + 1} \tilde{k}_1 \frac{q_1^k}{h^k} \psi_i dx \\
& \int_{\Omega} \frac{q_2^{k+1} - q_2^k}{\nabla t} \psi_i dx + (1 - \theta) g \int_{\Omega} h^k \partial_2 h^{k+1} \psi_i dx + \theta g \int_{\Omega} h^k \partial_2 h^k \psi_i dx + g \int_{\Omega} \partial_2 \eta h^k \psi_i dx \\
& \quad = \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla(h^k + \eta)|^2 + 1} f_s^{2k} \psi_i dx + (1 - \beta) \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla \eta|^2 + 1} \tilde{k}_2 \frac{q_2^{k+1}}{h^k} \psi_i dx \\
& \quad \quad + \beta \int_{\Omega} \sqrt{|\nabla \eta|^2 + 1} \tilde{k}_2 \frac{q_2^k}{h^k} \psi_i dx
\end{aligned}$$

Et

$$h_n^{k+1} \in W_{0n}, \quad q_{1n}^{k+1}, q_{2n}^{k+1} \in J_{0nk}^2$$

Avec la décomposition ci-dessus, nous obtenons les matrices relatives au système permettant de l'écrire sous sa forme matricielle suivantes, on note :

$$\begin{aligned}
M_1 \text{ la matrice carrée } na \times na & \quad \left( \int_{\Omega} \psi_i \psi_j dx \right) \\
M_2 \text{ la matrice carrée } ns \times ns & \quad \left( \int_{\Omega} \varphi_i \varphi_j dx \right) \\
M_f^{\kappa} \text{ la matrice carrée } na \times na & \quad \left( \int_{\Omega} \frac{\sqrt{|\nabla \eta|^2 + 1}}{h^k} \varphi_i \varphi_j dx \right) \\
R_{21} \text{ la matrice rectangulaire } ns \times na & \quad \left( \int_{\Omega} \partial_1 \varphi_i \psi_j dx \right) \\
R_{22} \text{ la matrice rectangulaire } ns \times na & \quad \left( \int_{\Omega} \partial_2 \varphi_i \psi_j dx \right) \\
R_{11}^{\theta} \text{ la matrice rectangulaire } na \times ns & \quad \left( \int_{\Omega} h^k \partial_1 \varphi_j \psi_i dx \right) \\
R_{12}^{\theta} \text{ la matrice rectangulaire } na \times ns & \quad \left( \int_{\Omega} h^k \partial_2 \varphi_j \psi_i dx \right)
\end{aligned}$$

$R_1^\eta$  la matrice rectangulaire  $na \times ns$   $\left( \int_{\Omega} \partial_1 \eta \varphi_j \psi_i dx \right)$

$R_2^\eta$  la matrice rectangulaire  $na \times ns$   $\left( \int_{\Omega} \partial_2 \eta \varphi_j \psi_i dx \right)$

On définit les vecteurs seconds membres  $F_h^k$  et  $F_q^{k\alpha}$  respectivement dans  $\mathbb{R}^{ns}$  et  $\mathbb{R}^{na}$  par :

$$\begin{aligned} F_h^k(i) &= - \int_{\Gamma} q_n \varphi_i d\Gamma, \\ F_{q_1}^k(i) &= \int_{\Gamma} \sqrt{|\nabla(h^k + \eta)|^2 + 1} f_s^{1k} \psi_i dx \\ F_{q_2}^k(i) &= \int_{\Gamma} \sqrt{|\nabla(h^k + \eta)|^2 + 1} f_s^{2k} \psi_i dx \end{aligned}$$

**Remarque :**

Une propriété importante qui fait l'intérêt de l'élément  $P_1^{NC}$  est le fait que ses fonctions de base sont orthogonales pour le produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$ . Il s'en suit que la matrice carrée,  $ns \times na : \int \psi_i \cdot \psi_j dx$  est diagonale, ce qui diminue de façon considérable le nombre de calculs à effectuer pour obtenir une solution. En effet, l'inconnue  $q^{k+1}$  sera simplement exprimée en fonction de la pression, ainsi il ne restera que l'équation de conservation à résoudre numériquement.

### 3.3.1.2 Étape2- Calcul de la hauteur et des vitesses horizontales

On note  $h^k, q_1, q_2$  les vecteurs des coefficients relatifs aux solutions respectifs  $h^k, q_1, q_2$ .

Le système précédent peut alors s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\begin{aligned} M_2 h^{k+1} - M_2 h^k - \delta t(1 - \alpha)(R_{21} q_1^{k+1} - R_{22} q_2^{k+1}) - \delta t \alpha (R_{21} q_1^k - R_{22} q_2^k) &= \delta t F_h^k \\ M_1 q_1^{k+1} - M_1 q_1^k + \delta t(1 - \theta) g R_{11}^k h^{k+1} + \delta t \theta g R_{11}^k h^k + \delta t R_{11} \eta &= \delta t F_{q_1}^k \\ &+ \delta t \tilde{k}_1 (1 - \beta) M_f^k q_1^{k+1} + \delta t \tilde{k}_1 \beta M_f^k q_1^k \\ M_1 q_2^{k+1} - M_1 q_2^k + \delta t(1 - \theta) g R_{12}^k h^{k+1} + \delta t \theta g R_{12}^k h^k + \delta t R_{12} \eta &= \delta t F_{q_2}^k \\ &+ \delta t \tilde{k}_2 (1 - \beta) M_f^k q_2^{k+1} + \delta t \tilde{k}_2 \beta M_f^k q_2^k \end{aligned}$$

Ainsi en posant

$$N_{1f}^k = M_1 - \delta t \tilde{k}_1 (1 - \beta) M_f^k, \quad R_1^k = (N_{1f}^k)^{-1} R_{11}^k, \quad N_{2f}^k = M_1 - \delta t \tilde{k}_1 (1 - \beta) M_f^k,$$

$$R_2^1 = (N_{2f}^k)^{-1} R_{12}^k, \quad Q_1^k = (M_1 - \delta t \tilde{k}_1 (1 - \beta) M_f^k)^{-1} (M_1 + \delta t \tilde{k}_1 \beta M_f^k),$$

$$Q_2^k = (M_1 - \delta t \tilde{k}_2 (1 - \beta) M_f^k)^{-1} (M_1 + \delta t \tilde{k}_2 \beta M_f^k)$$

On a :

$$M_2 h^{k+1} - M_2 h^k - \delta t (1 - \alpha) (R_{21} q_1^{k+1} - R_{22} q_2^{k+1}) - \delta t \alpha (R_{21} q_1^k - R_{22} q_2^k) = \delta t F_h^k$$

$$q_1^{k+1} = Q_1^k q_1^k - \delta t (1 - \theta) g R_1^k h^{k+1} - \delta t \theta g R_1^k h^k - \delta t g R_1^k \eta + \delta t N_{1f}^k F_{q_1}^k$$

$$q_2^{k+1} = Q_2^k q_2^k - \delta t (1 - \theta) g R_2^k h^{k+1} - \delta t \theta g R_2^k h^k - \delta t g R_2^k \eta + \delta t N_{2f}^k F_{q_2}^k$$

En procédant par substitution dans la première égalité, on obtient en posant :

$$R^k = R_{21} R_1^k + R_{22} R_2^k, \quad A^k = M_2 + \delta t^2 (1 - \alpha) (1 - \theta) g R^k, \quad B^k = M_2 - \delta t^2 \theta (1 - \alpha) g R^k$$

$$A^k h^{k+1} = B^k h^k - \delta t^2 (1 - \alpha) g R^k \eta + \delta t (1 - \alpha) (R_{21} Q_1^k q_1 + R_{22} Q_2^k q_2)$$

$$+ \delta t \alpha (R_{21} q_1^k + R_{22} q_2^k) + \delta t (1 - \alpha) R_{21} (N_{1f}^k)^{-1} + \delta t F_h^k$$

$$q_1^{k+1} = Q_1^k q_1^k - \delta t (1 - \theta) g R_1^k h^{k+1} - \delta t \theta g R_1^k h^k - \delta t g R_1^k \eta + \delta t N_{1f}^k F_{q_1}^k$$

$$q_2^{k+1} = Q_2^k q_2^k - \delta t (1 - \theta) g R_2^k h^{k+1} - \delta t \theta g R_2^k h^k - \delta t g R_2^k \eta + \delta t N_{2f}^k F_{q_2}^k$$

### 3.3.2 Calcul de la composante verticale de la vitesse

On calcule l'équation de conservation sur la verticale avec la méthode des différences finies. Le schéma est du type implicite grâce à l'introduction du coefficient  $\theta$  pour exprimer les dérivés en espaces. Ce choix entre les méthodes explicite et implicite a été guidé par un souci d'économie de temps d'ordinateur.

#### 3.3.2.1 Étape 3- calcul du débit d'échange dans la troisième équation

Le débit dans cette équation est le débit déjà calculé avec l'équation de Saint-Venant. L'équation de conservation sur la verticale peut être intégrée dans les limites d'un intervalle de temps :

$$\int_{Z_i}^{Z_i + \Delta Z_i} A_i dZ_i = \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} S_i dt + \sum_k \int_{n\Delta t}^{(n+1)\Delta t} q_{i,k}(Z_i, Z_k) dt$$

d'où en admettant que les coefficients  $A_i$  ne varient pas considérablement entre les niveaux  $Z_i$  et  $Z_i + \Delta Z_i$  c'est-à-dire que la variation de niveau  $\Delta Z_i$  est faible durant  $\delta t$ , ce qui conduit

à l'égalité suivante :

$$A_i(Z_i).\Delta Z_i = S_i(\tau.\Delta t + \Delta \sum_k q_{i,k}(Z_i(\tau), Z_k(\tau)) \quad \text{où} \quad n\Delta t \leq \tau \leq (n+1)\Delta t \quad (3.9)$$

Cette dernière égalité peut être écrite sous une forme mieux adaptée à la résolution numérique, mais alors il faut écrire explicitement la loi d'échange entre les éléments :

$$q_{i,k} = f(Z_i, Z_k)$$

La loi d'échange entre les éléments :

Pour un élément  $i$  considéré, le débit d'échange pouvant avoir lieu du côté  $k$  où  $k \in \{1, 2, 3\}$  est compté positivement lorsqu'il y a apport d'eau dans l'élément  $i$ , ou compté négativement lorsqu'il y a sortie d'eau dans le même casier. Il s'écrit :

$$q_{i,k} = \int_{C_k} (Z_i - Z_k)(V_i n_k) ds$$

où  $V_i$  est la vitesse au nœud de l'élément  $i$  et  $n_k$  la normale intérieure à l'arrête  $(i, k)$ . En utilisant une méthode de quadrature l'égalité ci-dessus devient :

$$q_{i,k} = \frac{(Z_i - Z_k)}{(V_i^x + V_i^y . n_k)} 2 \int_{C_k} ds$$

En adoptant un schéma implicite,

on écrit :  $q_{i,k}(Z_i(\tau), Z_k(\tau))$  le débit intermédiaire entre les débits

$q_{ik}^n = q_{i,k}(Z_i(n\Delta t), Z_k(n\Delta t))$  le débit à l'instant  $n\Delta t$  et

$q_{i,k}^{n+1} = q_{i,k}(Z_i(n+1)\Delta t, Z_k(n+1)\Delta t)$  le débit à l'instant  $(n+1)\Delta t$

Dans ce cas on peut remarquer, qu'on ne peut plus exprimer les niveaux  $Z_i^{n+1}$  explicitement à partir des niveaux à l'instant  $n\Delta t$  puisque le second membre de l'équation 3.9, contient des valeurs à l'instant  $(n+1)\Delta t$ . Il reste à déterminer la valeur intermédiaire du débit :

$$q_{i,k}(Z_i(\tau), Z_k(\tau)) = \theta q_{i,k}^{n+1} + (1 - \theta) q_{i,k}^n \quad \text{avec} \quad 0 \leq \theta \leq 1 \quad (3.10)$$



En reportant cette relation dans l'égalité 3.9, on obtient :

$$\Delta Z_i \cdot A_i = S_i \Delta t + \Delta t (\theta \sum_k q_{i,k}^{n+1} + (1 - \theta) \sum_k q_{i,k}^n)$$

En supposant, faibles les variations de niveau au cours de l'intervalle  $\Delta t$ , on peut écrire :

$$q_{i,k}^{n+1} = q_{i,k}^n + \frac{\partial q_{i,k}^n}{\partial Z_i} \Delta Z_i + \frac{\partial q_{i,k}^n}{\partial Z_k} \Delta Z_k$$

L'équation 3.10 prend alors la forme :

$$A^n \frac{\Delta Z_i}{\Delta t} = S_i + \sum_k q_{i,k}^n + \theta \left( \sum_k \frac{\partial q_{i,k}^n}{\partial Z_i} \Delta Z_i + \sum_k \frac{\partial q_{i,k}^n}{\partial Z_k} \Delta Z_k \right)$$

Les  $\Delta Z_k$  des éléments adjacents à l'élément  $i$  sont associés au  $\Delta Z_i$  dans cette équation. En considérant les  $q_{i,k}$  calculés précédemment dans le modèle de Saint-Venant 2D, les équations du type ci-dessus, écrites pour tous les éléments forment un système d'équations linéaires en  $\Delta Z_i$ . Pour chacun des cas traités, les conditions initiales  $Z_i^0$  sont données et la résolution à chaque pas de temps  $\Delta t$  donne des résultats valables, en prenant  $\Delta t$  suffisamment petit. On peut constater donc que cette équation n'est rien d'autre que l'expression de la vitesse verticale, qui s'écrit alors :

$$A^n q_{i,k}^{n+1} = S_i + \sum_k q_{i,k}^n + \theta \left( \sum_k \frac{\partial q_{i,k}^n}{\partial Z_i} \Delta Z_i + \sum_k \frac{\partial q_{i,k}^n}{\partial Z_k} \Delta Z_k \right)$$

#### Remarque :

On sait que le choix du pas de temps de calcul pose des difficultés du point de vue de l'exactitude des résultats,  $\Delta t$  doit être choisi suffisamment petit pour que la linéarisation soit valable surtout lorsque les variations de niveaux sont rapides.

D'autre part, les crues que l'on se propose d'étudier avec un tel schéma sont des crues annuelles rapides. Il faut donc que  $\Delta t$  soit assez grand pour ne pas conduire à des temps de calcul prohibitifs. Dans le cas d'un schéma explicite,  $\Delta t$  est limité par une condition de stabilité numérique, dans les grands modèles tels que le Sénégal,  $\Delta t$  n'aurait pu dépasser 30 minutes, le nombre de cycles aurait été excessif.

La méthode implicite par contre permettait d'atteindre des pas de temps de l'ordre de 6 heures en crues et 72 heures en étiage, avec  $\theta = 1$ . On est sûr d'obtenir un schéma de différences finies inconditionnellement stable.

### 3.4 Simulations numériques du processus d'écoulement

Le résultat final escompté consiste en une simulation numérique de l'évolution temporelle de l'écoulement et de l'évolution temporelle de la hauteur d'eau dans le domaine, avec et sans île. Pour se faire, on suit l'avancée du front d'eau dans le domaine et on observe pas à pas le recouvrement du domaine inondable par le front.

Afin d'aborder graduellement la complexité des situations réelles, des effets engendrés par un écoulement pour un débit constant sur un domaine de même niveau topographique sera d'abord abordé tandis que les spécificités seront détaillées dans un second temps. Le code de calcul est écrit en MATLAB, il donne le maillage du domaine, la vitesse et la hauteur en chacun des nœuds. Le maillage est non structuré et contient un nombre de sommets et d'éléments limités, ceci est pour faire tourner le programme à une échelle beaucoup plus réduite, sachant qu'en réalité il y a des milliers des sommets et d'éléments. Une interface graphique est conçue pour faciliter la navigation entre les différents cas étudiés.

Bien que l'échelle soit très réduite, le maillage reproduit toutes les caractéristiques du domaine en vraie grandeur. Les dimensions réelles du domaine : 40000m du barrage de Diamas à l'embouchure, 10000m de largeur, avec une frontière libre initiale à 10 mètres à partir du fond.

		ILE1	ILE2
GRANDEURS	Hauteur (m)	4	5
	Longueur (m)	2000	2000
	Largeur (m)	400	400
PROPRIETES DE L'ÉCOULEMENT	Débit initial $Q_0 (m^3 / s)$	1000	1000
	Nombre de Reynolds $Re$	4800	4800
	Vitesse initiale (m/s)	0.45	0.45
	Hauteurs (m)	1.4	1.4

FIG. 3.2: Description des obstacles du domaine

### 3.4.1 Résultats et Discussion

On cherche à connaître l'intensité de l'écoulement en tout point situé du domaine. Les points cruciaux sont alors : l'extension des écoulements permettant de préciser les zones atteintes, les profondeurs et vitesses de l'écoulement à l'intérieur de ces zones et les temps d'arrivées de l'onde de crue. Ils vont conditionner les délais disponibles pour une éventuelle intervention. Pour mieux comprendre l'effet de l'écoulement avec ou sans île on trace des profils de hauteur et de surface couverte au fur et à mesure de l'avancée du front d'eau.

#### 3.4.1.1 Présentation du logiciel DJAMA

Le logiciel DJAMA est un logiciel interactif de simulation de crue adapté à une utilisation grand public. D'un point de vue pédagogique, ce logiciel permet de réaliser des simulations sur une durée au choix en faisant varier de nombreux paramètres influençant une crue. Il permet de mettre en évidence différents processus influençant une crue, de discuter des conséquences. Une copie d'écran de son interface est montrée ci-dessous :



FIG. 3.3: Écran d'interface de DJAMA

Il permet de simuler :

- une crue sans obstacle, pour estimer le temps nécessaire pour que l'écoulement parcoure le lit majeur ;
- une crue avec différents obstacles en allant d'une inondation partielle jusqu'à une inondation totale. Il indique dans chacun des cas les dimensions longitudinale et transversale choisies, le temps CPU, la donnée à simuler (vitesse ou hauteur).

Dans ce qui suit différentes simulations issues de DJAMA sont présentées montrant l'évolution d'une crue dans un domaine sans obstacle et avec obstacles.

### 3.4.1.2 Simulation d'un écoulement dans un domaine sans obstacle

#### 1<sup>er</sup> cas d'étude

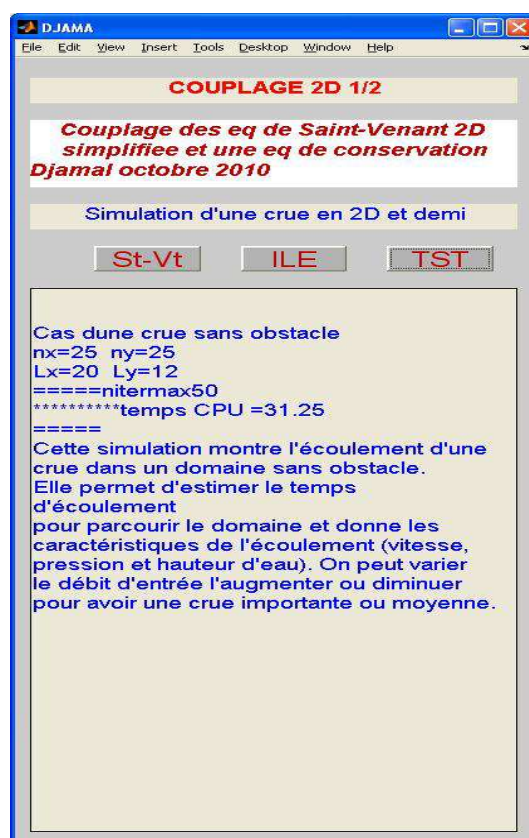


FIG. 3.4: Écran d'interface de DJAMA avec une crue sans obstacle

#### ★ Test1 :

Un premier champ de vitesse non perturbé a été étudié pour estimer le temps d'écoulement nécessaire pour que le front parcoure tout le domaine. Lorsque qu'on fait entrer un flux dans

le domaine suivant les conditions aux limites et initiales décrites précédemment, l'écoulement se propage en long et en large pour couvrir tout le domaine d'étude. Dans ce premier cas, on suppose que le flux à l'entrée est constant et continu, l'objectif étant de prévoir le temps pendant lequel le front arrivera à parcourir le domaine. Le front à l'entrée est matérialisé par la bande rouge au dessus du domaine, et à l'intérieur, l'écoulement est conventionnellement de la couleur bleue.

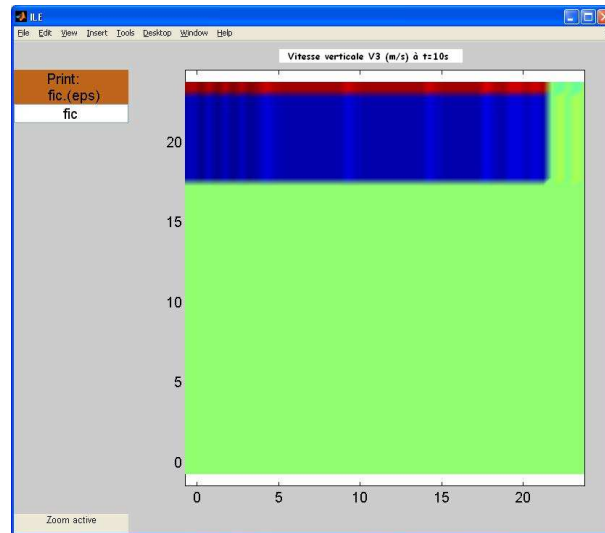


FIG. 3.5: Simulation d'un écoulement sans obstacle majeur et avec les conditions ( $H = 1$  mètres à  $t = 0$ , front 2 mètres)

Les figures ci-dessous illustrent la variation de la hauteur en fonction du temps  $H(t)$ , et de la hauteur en fonction de la surface couverte  $H(S(t))$ .

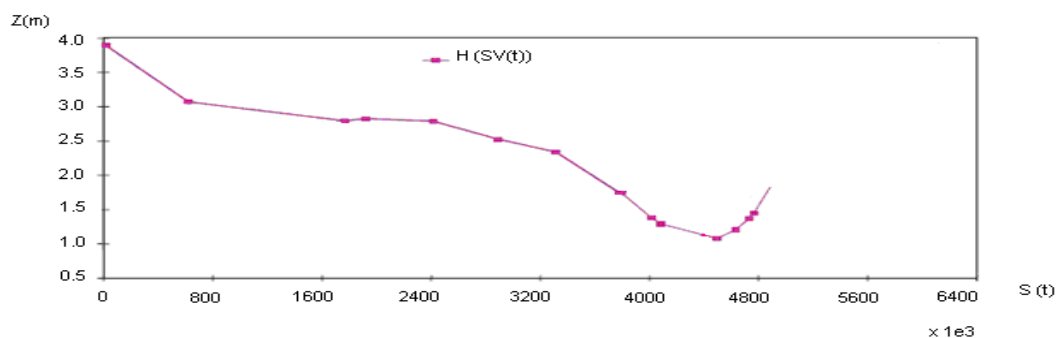


FIG. 3.6: graphe illustrant la simulation de la figure 3.11

Comme le montre 3.11, plus le temps est grand moins la hauteur devient grande. Ce qui est tout à fait normal, en absence d'obstacle majeur, le front diminue au fur et à mesure de sa

propagation. Cette situation se traduit de façon inverse dans l'étude du graphe de la surface couverte  $SV(t)$ , autrement dit, plus on avance dans le temps plus la surface couverte devient importante.

Le graphe de la hauteur en fonction de la surface d'en haut  $H(S(t))$  quant à elle, illustre la hauteur des éléments au fur et à mesure que la propagation avance. Elle nous renseigne que plus un nombre maximal d'éléments est couvert moins la hauteur est grande.

★ Test :2

On suppose que la bathymétrie est très variable et donc que le domaine peut être décomposé en différents niveaux.

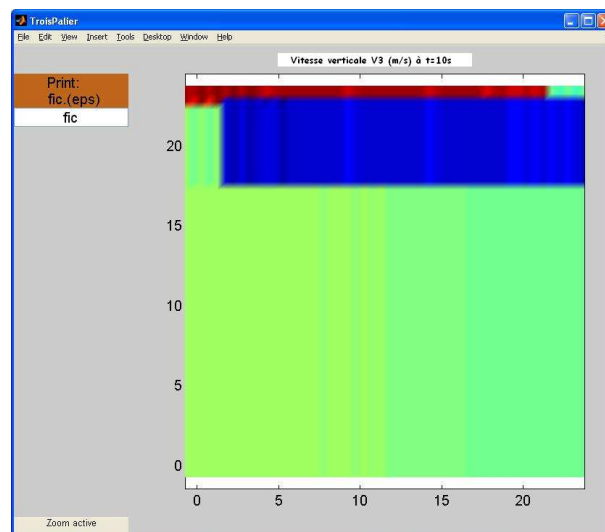


FIG. 3.7: Simulation d'un écoulement dans un domaine tri bande : (front 2 mètres)

On s'aperçoit que la progression du front s'effectue de la plus grande hauteur à la plus petite avant de s'écouler verticalement, une fois la largeur du domaine atteint le front de l'écoulement augmente avant de se stabiliser vers la fin de son parcours. Dans les premiers temps de l'écoulement, le front d'entré se propage d'un côté pour couvrir les hauteurs les moyens élevés et de l'autre le front d'écoulement recouvre le domaine de haut en bas. Une fois la largeur du domaine atteint l'écoulement s'effectue verticalement en augmentant de niveau. La hauteur est illustrée dans le schéma ci-dessous :

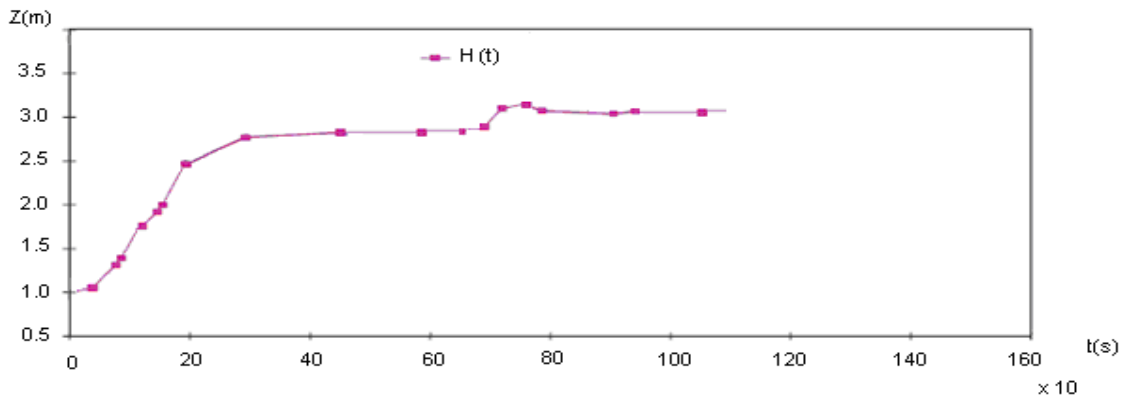
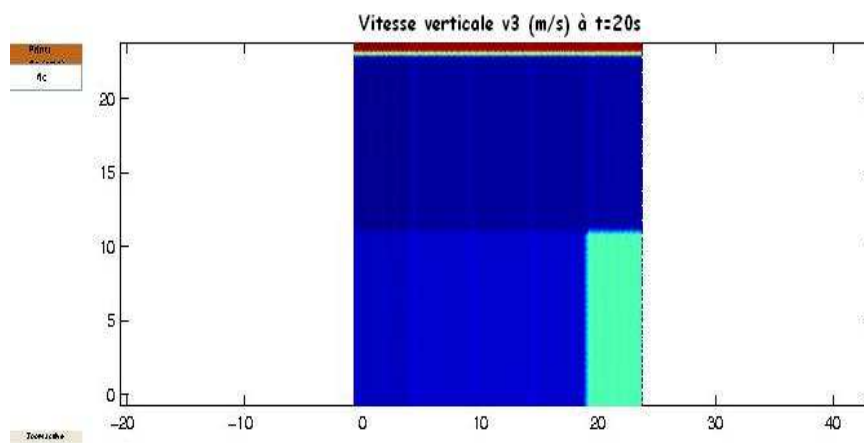


FIG. 3.8: graphe illustrant la simulation de 3.7

Le domaine étant chargé initialement, la nouvelle entrée augmente le niveau de la hauteur du front dans les premiers pas de temps beaucoup plus vite qu'après.

### 2<sup>me</sup> cas d'étude

On effectue une deuxième simulation dans laquelle contrairement à la première, on considère que la pluie tombe dans le domaine, donc le niveau de recouvrement d'eau n'est pas le même dans le domaine. On suppose que le domaine se décompose principalement en deux sous domaines de niveaux d'eau différents. On constate que le flux entrant converge alors rapidement vers les zones basses où il est plus marqué.

FIG. 3.9: Simulation d'un écoulement dans un domaine avec les conditions initiales ( $H = 1.0$  mètres sur DF, à  $t = 0$ ) (Front 0.5 mètres)

Dans cette simulation, on distingue toujours le flux d'entrée qui est rouge et le front d'écoulement qui est plus marqué, au travers sa progression nette, dans la partie la plus profonde du domaine. Le profil de la variation de la hauteur en fonction du temps est mise en évidence dans la 3.10, ci-dessous.

Le graphe ci-dessous illustre la variation de la hauteur en fonction de la surface couverte  $H(S(t))$  dans l'étude du deuxième cas.

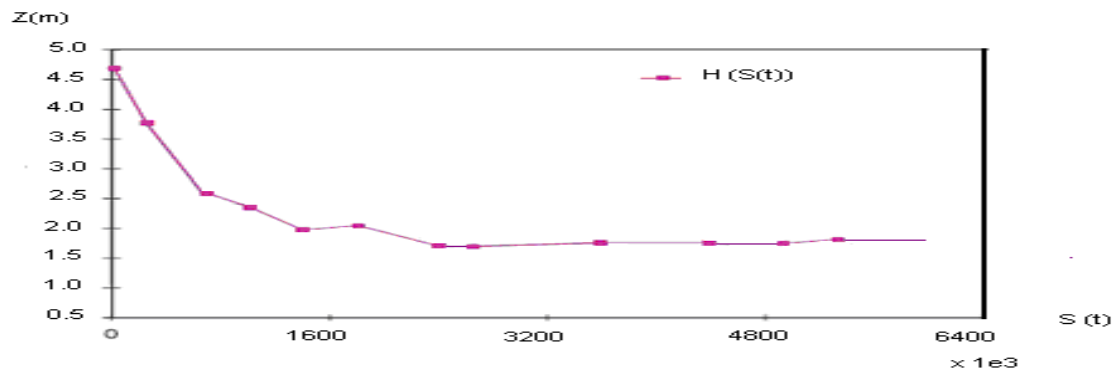


FIG. 3.10: graphe illustrant la simulation de la 3.10

Bien qu'on attend à un rehaussement du plan d'eau après le passage du front d'écoulement en plus de la pluie, le niveau d'eau à tendance à décroître au début dû au perte de charge, avant de reprendre plus rapidement contrairement à la première partie. Après un seuil minimum, la hauteur croît, le front augmente au fur et a mesure de sa progression dû à la présence de la pluie. L'irrégularité de la courbe se justifie par la forme très variable de la bathymétrie (voire annexe). Et ceci se traduit en la courbe de la hauteur en fonction de la surface couverte, sous forme de cloche. La surface couverte quant à elle croît plus rapidement en fonction du temps du fait des conditions initiales dans le domaine.

### 3.4.1.3 Simulation d'un écoulement dans un domaine avec obstacle

La présence de l'obstacle crée de fortes perturbations dans l'écoulement. Cela se traduit par :

1. L'apparition d'une zone de circulation à faible vitesse, située dans l'alignement de l'obstacle et qui s'étend jusqu'au seuil aval, avec des cellules de courants secondaires relativement stationnaires.
2. La formation d'une veine liquide qui contourne l'obstacle et accélère au niveau de la section opposée à l'obstacle.



3. L'observation d'une zone de transition aux alentours de l'obstacle, lieu de naissance de structures turbulentes.

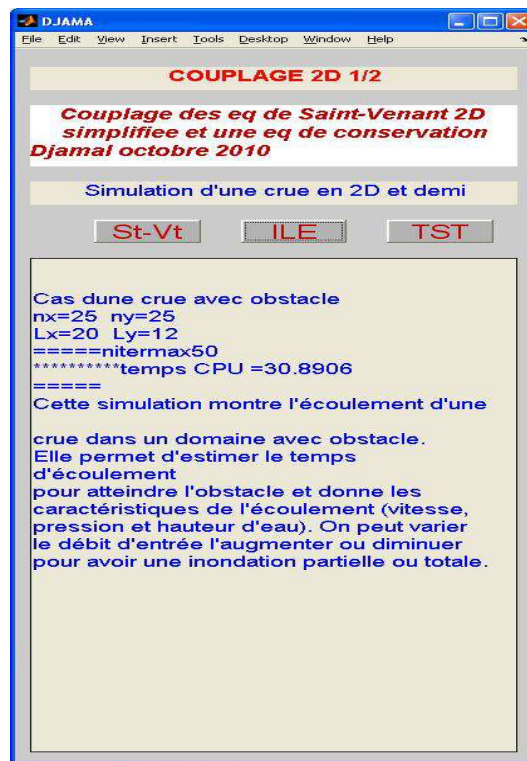


FIG. 3.11: Écran d'interface de DJAMA avec une crue en présence obstacle

La distribution des vecteurs vitesses dans le domaine le montre bien dans la figure ci-dessous :

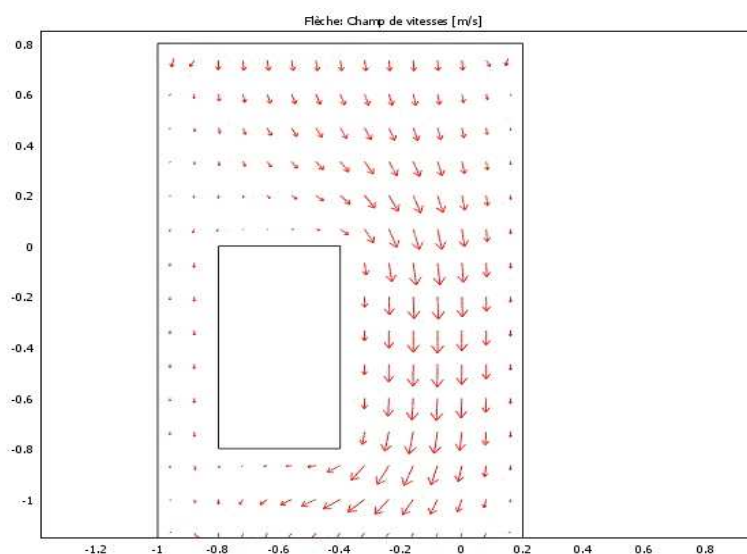


FIG. 3.12: Champ de vitesse mesuré dans un plan horizontal avec l'obstacle.

Pour étudier l'influence de l'obstacle, on en place deux l'un après l'autre dont les caractéristiques sont données dans le tableau ci-dessus. Dans les deux cas de l'écoulement avec obstacle, la première section de l'obstacle se trouve loin de l'entrée du flux, ceci correspond à une distance au moins de 2 000 mètres de l'entrée. Dans cette section (section amont de l'obstacle), le profil de la hauteur est parfaitement décroissante, parce que dans cet endroit l'écoulement n'est pas perturbé par la présence de l'obstacle et par conséquent décroît au fur et à mesure de sa propagation.

La deuxième section se trouve juste au-dessus de l'obstacle, les profils des hauteurs pour les différents cas sont moins réguliers contrairement à la première section. Cependant la vitesse en cet endroit est nettement supérieure à celle de la vitesse à l'entrée car l'écoulement est accéléré à cause du rétrécissement de la section du passage de l'écoulement.

En aval de l'obstacle, pour les différents cas, le profil de la hauteur est croissante mais ayant une envergure de vitesse faible que celle de la deuxième section.

#### 1<sup>er</sup> cas d'étude

On effectue une simulation d'un l'écoulement au tour d'une île dans le cas où le niveau de l'île inférieur au front (avec les caractéristiques décrits plus haut). L'île sera recouvert et les fluctuations de la hauteur seront illustrées par la 3.14.

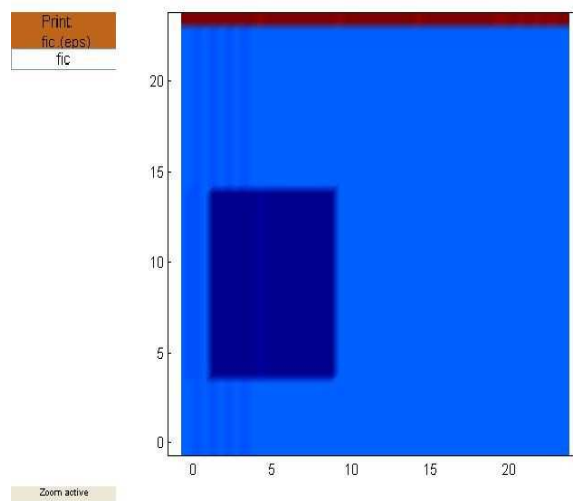


FIG. 3.13: Obstacle de niveau inférieur au niveau du front : ( $H=1$  mètres sur  $D$  à  $t=0$ , front 3.5 mètres)

Comme dans le cas d'un écoulement simple, le flux se propage dans le domaine en long et en large. Dans la première section (amont de île), l'écoulement décroît de la rentrée jusqu'au abords de l'île, le profil est donc décroissante. Voir le graphe.

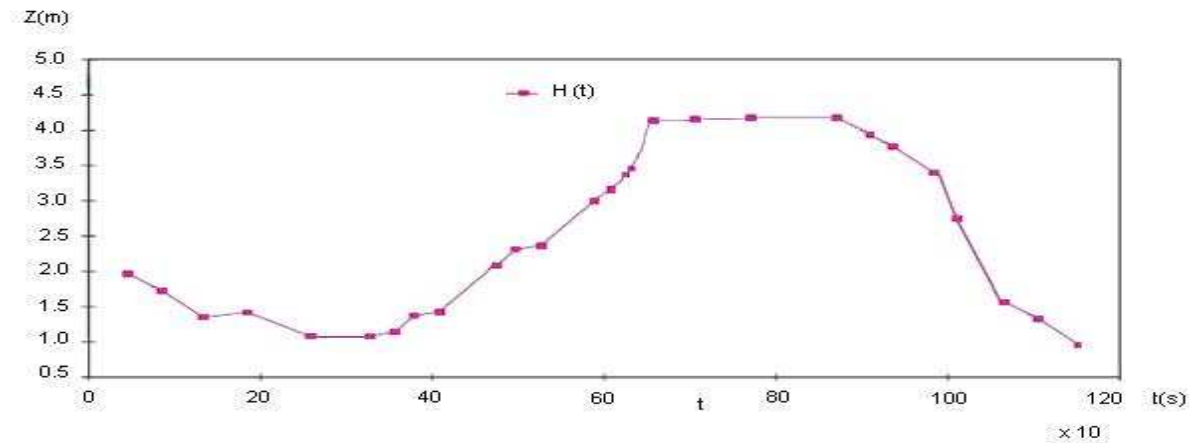
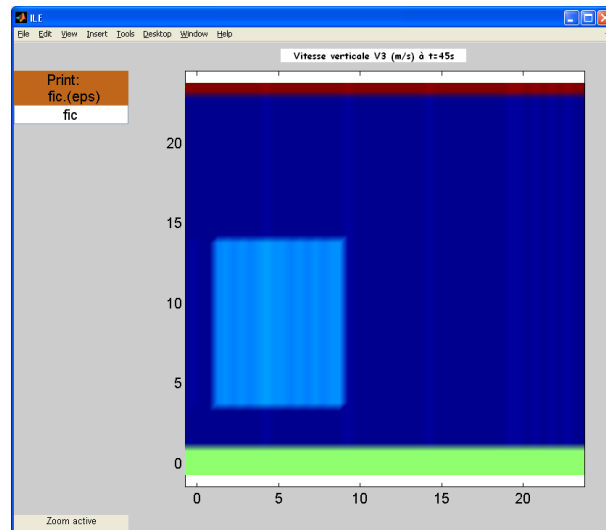


FIG. 3.14: graphe illustrant la simulation de 3.13

Dans la deuxième section, l'île étant petit par rapport au front de l'écoulement, est couvert par le fluide. C'est une inondation totale. Elle engendre des perturbations, la hauteur augmente, d'où l'allure croissante dans le graphe. Dans la dernière section, après une certaine stabilisation de la hauteur aux abords immédiats de l'île, l'écoulement décroît jusqu'à la fin de son parcours.

### 2<sup>ème</sup> cas d'étude

Cette simulation reproduit l'écoulement au tour d'une île dans un domaine dans le cas où l'île est plus haute que le front d'écoulement.

FIG. 3.15: Obstacle de niveau supérieur au niveau du front : ( $H=1$  sur DF à  $t=0$  ; front 3.5 mètres)

Dans cette situation, on considère que le domaine n'a pas le même niveau de recouvrement d'eau et initialement est bien chargée. Le flux arrivant par la partie la plus élevée, augmente de

niveau en gagnant l'autre bout du domaine. Une fois la largeur du domaine atteint, l'écoulement s'effectue verticalement c'est-à-dire d'amont en aval. Dans cette étude aussi, le contact du front d'écoulement avec l'île produit d'énormes perturbations et puisque le front ne peut recouvrir l'île, la surface d'écoulement étant diminuée la hauteur aux abords de l'île augmente considérablement entraînant une inondation partielle de l'île. Les variations de la hauteur sont illustrées dans le graphe ci-dessous.

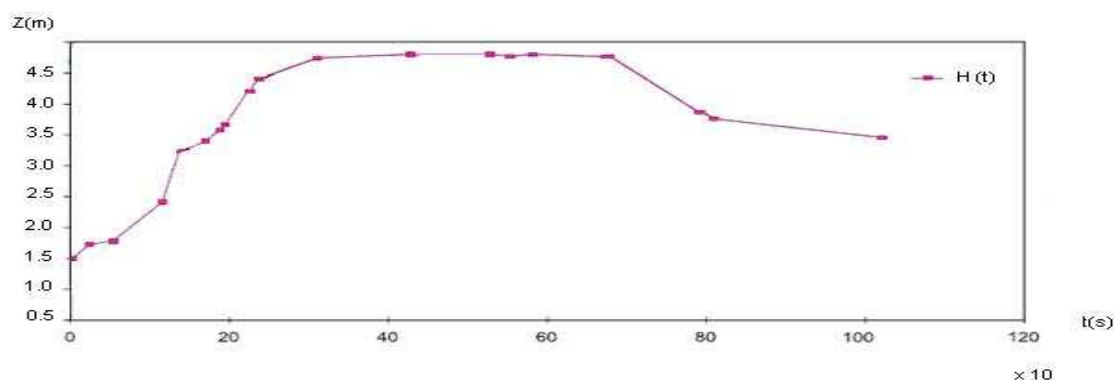


FIG. 3.16: graphe illustrant la simulation de 3.15

Le domaine étant très chargé initialement, le flux augmente au fur et à mesure de la propagation, avant d'atteindre la première section de l'île. Le contact avec elle produit une augmentation brusque de la hauteur de part et d'autre de l'île. A ce niveau la vitesse d'écoulement augmente aussi jusqu'à l'aval de l'île et puis la hauteur décroît progressivement en même temps que la vitesse. De part et d'autre de l'île, le front augmente et puis diminue à l'aval de l'île.

### Remarque

On s'aperçoit que le remplacement de la première île par la seconde plus grande amène un changement notable sur le niveau que pourrait avoir le front aux alentours de l'île ; cependant on observe que la perturbation existe dans les deux cas, ce qui semble représenter la perte de charge au niveau de l'île.

## 3.4.2 Comparaison des données calculées et des données observées

### 3.4.2.1 Nature et Provenance des données

L'étude que nous avons entreprise nécessite une masse importante de données hydrométriques et pluviométriques collectées en différents sites du bassin, en amont de SL, essentiellement des

cumuls annuels de hauteurs de pluies journalière que nous avons obtenues auprès de sources différentes :

- Sous forme de tableau 31 *ligne*  $\times$  12 *colonnes* de pluies journalières en 15 stations du Sénégal par le Bureau climatologie de l'ASECNA, depuis 1972.
- Auprès de la banque PLUVIOM du service Hydraulique du centre Saint-Louis jusqu'en 2005
- Auprès de la banque PLUVIOM du service Hydrologie du centre ORSTOM de Dakar HANN, jusqu'en 2003

Bien entendu, ces différentes archives ont bien souvent les mêmes sources de mesures.

### 3.4.2.2 Tableaux comparatifs des données calculées et des données observées

Pour valider notre code, on est amené à comparer les résultats numériques et des résultats observés. La crue de 2003 est une référence par son ampleur et par ses conséquences. Elle constitue une solution expérimentale idéale pour une comparaison aussi bien quantitative que qualitative pour cette validation du code. Pour illustrer les propriétés de la méthode  $2D1/2$  tel que la bonne description du champ des vitesses et de la hauteur, nous allons comparer les résultats numériques de la hauteur et les hauteurs relevées durant la crue d'une part, et les débit numériques et les débits observés d'autre part pour la même période. Les relevés des données expérimentales ont lieu tous les jours, à intervalles réguliers, à 8 heures du matin à la même station de coordonnées (2366.666 ; 123.333). Pour déterminer les résultats numériques correspondant aux données observées, on impose des conditions initiales  $h_0 = 1.25m$ ,  $Q_0 = 50m^3/s$  choisies au moment où le fleuve n'est soumis ni à l'influence des marées fortes ou faibles ni aux crues saisonnières, une période d'accalmie (le mois de mai). Et on utilise notre logiciel avec un pas de temps  $\Delta t = 24h$ . Les données expérimentales et les données numériques sont consignées dans les tableaux ci-dessous.

En outre, pour évaluer l'erreur commise, on définit pour chaque tableau, l'erreur moyenne entre les valeurs observées et les valeurs numériques calculées, le temps CPU (ce temps CPU mesure l'efficacité de l'algorithme). L'erreur moyenne notée L1-erreur permet de comparer de mois en mois la variation de l'erreur. On définit l'erreur moyenne par :

$$L^1 - erreur = \frac{1}{nombredejour} \sum_i |h_{num} - h_{exp}|$$

Tableau 13 : Tableau des données expérimentales et numériques du mois de juillet

Date	Résultats expérimentaux		Résultats numériques	
Juillet 2003	Hauteurs ( $m$ )	Débits ( $m^3 / s$ )	Hauteurs ( $m$ )	Débits ( $m^3 / s$ )
1	2.20	182	2,03	2,88E+02
2	2.18	180	2,10	8,90E+01
3	2.17	189	2,08	1,77E+02
4	2.18	190	2,04	1,73E+02
5	2.17	177	2,06	9,70E+01
6	2.16	180	2,08	9,50E+01
7	2.14	171	2,07	1,86E+02
8	2.14	200	2,07	1,81E+02
9	2.11	196	2,08	1,76E+02
10	2.15	200	2,06	1,79E+02
11	2.17	204	2,08	8,30E+01
12	2.14	346	2,09	1,63E+02
13	2.14	345	2,10	2,35E+02
14	2.15	344	2,09	2,88E+02
15	2.13	471	2,06	2,90E+02
16	2.10	585	2,06	1,67E+02
17	2.04	762	2,05	1,53E+02
18	1.86	997	2,07	1,81E+02
19	1.70	959	2,09	3,00E+02
20	1.70	966	2,03	4,47E+02
21	1.70	978	1,99	4,41E+02
22	1.67	978	2,00	4,34E+02
23	1.63	966	1,93	5,25E+02
24	1.64	893	1,88	4,98E+02
25	1.65	893	1,88	5,05E+02
26	1.67	872	1,88	5,05E+02
27	1.66	916	1,83	8,17E+02
28	1.64	804	1,80	7,82E+02
29	1.65	824	1,73	8,93E+02
30	1.67	818	1,63	1,01E+03
31	1.69	804	1,62	9,26E+02

Tableau 14 : L'erreur moyenne et temps de calcul de l'écoulement au mois de juillet

Notre Logiciel		
<i>Maillage</i>	<i><math>L^1</math> - erreur</i>	<i>CPU</i>
128 x 128	0.1349355	14.76

Tableau 15 : Tableau des données expérimentales et numériques du mois de Août

Date	Résultats expérimentaux		Résultats numériques	
Août 2003	Hauteurs ( $m$ )	Débits ( $m^3 / s$ )	Hauteurs ( $m$ )	Débits ( $m^3 / s$ )
1	1.73	815	1,71	7,03E+02
2	1.71	903	1,74	7,05E+02
3	1.71	890	1,73	7,85E+02
4	1.67	970	1,71	7,70E+02
5	1.63	954	1,69	7,50E+02
6	1.63	950	1,66	1,21E+03
7	1.65	962	1,63	8,90E+02
8	1.58	1024	1,62	9,63E+02
9	1.60	956	1,57	1,20E+03
10	1.64	962	1,55	1,41E+03
11	1.60	1123	1,52	1,11E+03
12	1.57	1169	1,55	1,12E+03
13	1.59	1169	1,49	1,29E+03
14	1.59	1231	1,52	1,06E+03
15	1.55	1355	1,51	1,33E+03
16	1.56	1346	1,53	1,31E+03
17	1.54	1447	1,48	1,24E+03
18	1.55	1458	1,48	1,29E+03
19	1.55	1498	1,50	1,25E+03
20	1.55	1486	1,51	1,46E+03
21	1.55	1486	1,48	1,42E+03
22	1.55	1449	1,49	1,38E+03
23	1.57	1544	1,52	1,38E+03
24	1.52	1587	1,50	1,45E+03
25	1.50	1576	1,52	1,48E+03
26	1.51	1651	1,52	1,52E+03
27	1.51	1589	1,50	1,54E+03
28	1.51	1617	1,52	1,54E+03
29	1.51	1593	1,51	1,52E+03
30	1.52	1569	1,54	1,54E+03
31	1.50	1658	1,51	1,78E+03

Tableau 16 : L'erreur moyenne et temps de calcul de l'écoulement au mois de Août

Notre Logiciel		
<i>Maillage</i>	<i><math>L^1</math> - erreur</i>	<i>CPU</i>
128 x 128	0.0396774	12.33

Tableau 17 : Tableau des données expérimentales et numériques du mois de septembre

Date	Résultats expérimentaux		Résultats numériques	
Septembre 2003	Hauteurs ( $m$ )	Débits ( $m^3 / s$ )	Hauteurs ( $m$ )	Débits ( $m^3 / s$ )
1	1.53	1689	1,50	1,84E+03
2	1.53	1719	1,51	1,84E+03
3	1.52	1621	1,51	1,93E+03
4	1.53	1719	1,51	1,71E+03
5	1.52	1719	1,53	1,67E+03
6	1.53	1719	1,52	1,74E+03
7	1.51	1663	1,52	1,64E+03
8	1.51	1745	1,51	1,74E+03
9	1.50	1632	1,50	1,66E+03
10	1.52	1595	1,52	1,69E+03
11	1.51	1560	1,52	1,80E+03
12	1.51	1653	1,50	1,82E+03
13	1.51	1653	1,51	1,78E+03
14	1.51	1653	1,52	1,78E+03
15	1.52	1653	1,50	1,78E+03
16	1.50	1653	1,52	1,80E+03
17	1.50	1653	1,51	1,78E+03
18	1.51	1653	1,51	1,78E+03
19	1.52	1738	1,52	1,78E+03
20	1.51	1850	1,50	1,78E+03
21	1.50	1850	1,52	1,82E+03
22	1.53	1881	1,53	2,00E+03
23	1.55	1901	1,52	2,00E+03
24	1.58	1932	1,52	2,00E+03
25	1.58	1932	1,50	2,00E+03
26	1.57	1922	1,50	2,00E+03
27	1.60	1953	1,50	2,00E+03
28	1.59	1942	1,50	2,00E+03
29	1.60	1953	1,47	2,00E+03
30	1.62	1973	1,52	2,00E+03

Tableau 18 : L'erreur moyenne et temps de calcul de l'écoulement au mois de septembre

Notre Logiciel		
<i>Maillage</i>	<i><math>L^1</math> - erreur</i>	<i>CPU</i>
128 x 128	0.0254333	10.67



Tableau 19 : Tableau des données expérimentales et numériques du mois d'octobre

Date	Résultats expérimentaux		Résultats numériques	
Octobre 2003	Hauteurs ( $m$ )	Débits ( $m^3 / s$ )	Hauteurs ( $m$ )	Débits ( $m^3 / s$ )
1	1.63	1983	1,45	4,77E+02
2	1.64	1993	1,45	4,75E+02
3	1.59	1942	1,44	4,73E+02
4	1.57	1922	1,44	3,44E+02
5	1.59	1942	1,46	3,49E+02
6	1.53	1885	1,47	3,44E+02
7	1.58	1757	1,47	3,36E+02
8	1.50	1836	1,47	3,46E+02
9	1.50	1849	1,47	3,51E+02
10	1.51	1836	1,47	3,30E+02
11	1.53	1849	1,50	3,35E+02
12	1.51	1836	1,50	2,05E+02
13	1.50	1836	1,48	1,05E+02
14	1.50	1836	1,47	1,08E+02
15	1.51	1971	1,44	1,05E+02
16	1.50	1947	1,44	1,09E+02
17	1.50	2005	1,40	2,13E+02
18	1.38	1962	1,37	3,53E+02
19	1.42	1810	1,34	3,53E+02
20	1.45	1836	1,44	3,42E+02
21	1.32	1988	1,40	3,37E+02
22	1.40	1987	1,39	3,35E+02
23	1.38	2059	1,36	3,37E+02
24	1.39	2004	1,44	1,99E+02
25	1.38	2036	1,46	2,02E+02
26	1.34	2036	1,48	2,06E+02
27	1.33	2036	1,47	1,06E+02
28	1.30	2020	1,66	1,07E+02
29	1.24	2092	1,66	1,07E+02
30	1.36	1987	1,63	1,07E+02
31	1.34	1914	1,63	1,08E+02

Tableau 20 : L'erreur moyenne et temps de calcul de l'écoulement au mois d'octobre

Notre Logiciel		
<i>Maillage</i>	<i><math>L^1</math> - erreur</i>	<i>CPU</i>
128 x 128	0.0954516	12.31

Tableau 21 : Tableau des données expérimentales et numériques du mois de novembre

Date	Résultats expérimentaux		Résultats numériques	
Novembre 2003	Hauteurs ( $m$ )	Débits ( $m^3 / s$ )	Hauteurs ( $m$ )	Débits ( $m^3 / s$ )
1	1.32	1901	1,64	1,80E+03
2	1.29	1813	1,65	1,80E+03
3	1.35	1632	1,64	1,80E+03
4	1.37	1459	1,64	1,80E+03
5	1.24	1712	1,63	1,80E+03
6	1.37	1667	1,62	1,80E+03
7	1.23	1679	1,63	1,80E+03
8	1.30	1556	1,63	1,80E+03
9	1.30	1531	1,60	1,80E+03
10	1.23	1977	1,60	1,80E+03
11	1.18	1702	1,57	1,80E+03
12	1.14	1452	1,57	1,80E+03
13	1.13	1490	1,55	1,80E+03
14	1.15	1437	1,54	1,80E+03
15	1.19	1405	1,51	1,80E+03
16	1.22	1153	1,49	1,80E+03
17	1.36	983	1,45	1,80E+03
18	1.25	1066	1,50	1,80E+03
19	1.30	894	1,50	1,50E+03
20	1.30	861	1,50	1,36E+03
21	1.40	504	1,50	1,48E+03
22	1.69	419	1,53	1,36E+03
23	1.78	422	1,56	1,50E+03
24	1.83	467	1,52	1,48E+03
25	1.85	439	1,51	1,30E+03
26	1.90	460	1,54	1,20E+03
27	1.96	222	1,56	1,20E+03
28	2.00	363	1,60	9,80E+02
29	2.03	221	1,60	1,06E+03
30	2.03	368	1,57	1,06E+03

Tableau 22 : L'erreur moyenne et temps de calcul de l'écoulement au mois de novembre

---

Notre Logiciel		
<i>Maillage</i>	<i><math>L^1</math> - erreur</i>	<i>CPU</i>
<hr/>		
128 x 128	0.301	17.45

---

Date	Résultats expérimentaux		Résultats numériques	
Décembre 2003	Hauteurs ( $m$ )	Débits ( $m^3 / s$ )	Hauteurs ( $m$ )	Débits ( $m^3 / s$ )
1	2.03	481	2,04	4,77E+02
2	2.05	467	2,03	4,75E+02
3	2.03	573	2,04	4,73E+02
4	2.06	452	2,05	3,44E+02
5	2.04	447	2,07	3,49E+02
6	2.03	448	2,06	3,44E+02
7	1.99	455	2,05	3,36E+02
8	1.97	484	2,04	3,46E+02
9	1.93	480	2,02	3,51E+02
10	1.90	465	2,03	3,30E+02
11	2.00	200	2,01	3,35E+02
12	2.05	106	2,01	2,05E+02
13	2.08	226	2,00	1,05E+02
14	2.10	224	2,02	1,08E+02
15	2.08	217	2,04	1,05E+02
16	2.08	210	2,00	1,09E+02
17	2.07	201	2,04	2,13E+02
18	2.07	193	2,03	3,53E+02
19	2.06	189	2,02	3,53E+02
20	2.07	186	2,09	3,42E+02
21	2.06	183	2,08	3,37E+02
22	2.05	183	2,08	3,35E+02
23	2.04	207	2,08	3,37E+02
24	2.04	222	2,09	1,99E+02
25	2.03	230	2,09	2,02E+02
26	2.00	233	2,09	2,06E+02
27	2.00	229	2,09	1,06E+02
28	2.00	227	2,09	1,07E+02
29	2.00	107	2,10	1,07E+02
30	2.03	96	2,10	1,07E+02
31	2.05	30	2,10	1,08E+02

**Tableau 24 : L'erreur moyenne et temps de calcul de l'écoulement au mois de décembre**

Notre Logiciel		
<i>Maillage</i>	$L^1$ - erreur	<i>CPU</i>
128 x 128	0.0509677	11.71

**Remarque**

On observe à partir de la comparaison une erreur moyenne importante au début et très importante vers la fin correspondant au mois de novembre. Pour la comparaison du mois de juillet, c'est-à-dire au début, cette période correspond à de fortes pluies diluviennes outre les apports latéraux provenant des bras du fleuve, ce qui justifie l'écart important entre quelques valeurs expérimentales et les valeurs numériques, et, conduit alors à une erreur relativement importante. Contrairement au début de l'observation, la période du mois de novembre elle, correspond à la fin des précipitations et le retrait de tous les apports latéraux. Ce phénomène crée des écarts considérables entre les valeurs numériques et expérimentales. Le pique de l'erreur moyenne est atteint en cette période.

Mis à part cette valeur extrême l'erreur moyenne reste correcte dans toute l'observation.

Dans le tableau ci-dessous nous avons comparé les hauteurs et les débits pour des temps longs en un point du domaine.

Tableau 25 : Comparaison entre les résultats expérimentaux et les résultats numériques

<i>t</i>	<i>Schema</i>	<i>H</i>	<i>Débit</i>	<i>Position</i>
24 h	<i>Expérimental</i>	2.20	182	(2366.666; 123.333)
	<i>Notre Logiciel</i>	2,03	2,88E+02	(2366.666; 123.333)
240 h	<i>Expérimental</i>	2.15	200	(2366.666; 123.333)
	<i>Notre Logiciel</i>	2,06	1,79E+02	(2366.666; 123.333)
984 h	<i>Expérimental</i>	1.64	962	(2366.666; 123.333)
	<i>Notre Logiciel</i>	1,55	1,41E+03	(2366.666; 123.333)
1344 h	<i>Expérimental</i>	1.50	1576	(2366.666; 123.333)
	<i>Notre Logiciel</i>	1,52	1,48E+03	(2366.666; 123.333)
1728 h	<i>Expérimental</i>	1.52	1595	(2366.666; 123.333)
	<i>Notre Logiciel</i>	1,52	1,69E+03	(2366.666; 123.333)
2088 h	<i>Expérimental</i>	1.58	1932	(2366.666; 123.333)
	<i>Notre Logiciel</i>	1,50	2,00E+03	(2366.666; 123.333)
2448 h	<i>Expérimental</i>	1.51	1836	(2366.666; 123.333)
	<i>Notre Logiciel</i>	1,47	3,30E+02	(2366.666; 123.333)
2808 h	<i>Expérimental</i>	1.38	2036	(2366.666; 123.333)
	<i>Notre Logiciel</i>	1,46	2,02E+02	(2366.666; 123.333)
3192 h	<i>Expérimental</i>	1.23	1977	(2366.666; 123.333)
	<i>Notre Logiciel</i>	1,60	1,80E+03	(2366.666; 123.333)
3432 h	<i>Expérimental</i>	1.30	861	(2366.666; 123.333)
	<i>Notre Logiciel</i>	1,50	1,36E+03	(2366.666; 123.333)
3696 h	<i>Expérimental</i>	2.03	481	(2366.666; 123.333)
	<i>Notre Logiciel</i>	2,04	4,77E+02	(2366.666; 123.333)
4368 h	<i>Expérimental</i>	2.00	107	(2366.666; 123.333)
	<i>Notre Logiciel</i>	2,10E+02	1,07E+02	(2366.666; 123.333)

Avec les données que nous avons consignées d'une part, des données observées (hauteurs et débits) lors de la crue de 2003 et des données calculées par notre simulation, le graphe comparatif de ces données montre que l'erreur relative la plus importante est aux alentours de 0.3, ce qui nous permettra de caler le modèle. Bien que la comparaison soit allée au-delà du tableau, en guise d'illustration, nous n'avons pris que les valeurs de juillet jusqu'à décembre correspondantes à un délai de six mois d'observation. Le graphe de l'évolution de l'erreur dans le temps montre que l'erreur est maximale au mois de novembre c'est-à-dire la période qui correspond à une érosion rapide du domaine local en particulier et plus généralement de la Langue de Barbarie.

## 3.5 Conclusion

Dans cette partie, la problématique d'une inondation relevant d'une montée subite du niveau des eaux avec une forte augmentation du débit, l'état de l'art m'a permis de relier les phénomènes physiques entre eux et de faire le point sur l'ensemble des logiciels existant sur le marché et susceptible de traiter notre problème. Une analyse critique et comparative de ces derniers m'a montré que, si certains d'entre eux ont un abord très simplificateur, tous ont un dénominateur commun qui est la non accessibilité au grand public due à un coût le plus souvent trop élevé. En outre, la dérivation des équations de Navier-Stokes  $3D$  a conduit aux équations de Saint-Venant  $2D$ , le modèle théorique et au développement d'outils de simulation numérique permettant d'appréhender les écoulements dans le domaine d'étude. Nous avons développé un algorithme pour une solution numérique du couplage  $2D1/2$  plus adapté, entre l'équation de Saint-Venant  $2D$  et l'équation  $1D$  de conservation selon la verticale permettant de suivre à chaque instant l'évolution de la hauteur d'eau en chacun des nœuds du maillage. Cette approche nouvelle que nous proposons permet de palier aux difficultés inhérentes à la méthode  $3D$  des équations de Navier-Stokes. Une grande première. J'ai développé une simulation numérique conçue selon un processus itératif avec des scénarios à des dimensions académiques qui ont permis de valider la méthode, l'algorithme et l'implémentation informatique

La méthode des éléments finis mixte adoptée, elle, a l'avantage d'approcher la vitesse et la charge simultanément avec le même ordre de convergence.



## Troisième partie. Étude de l'élargissement de la brèche

Cette partie est consacrée à la modélisation et à la simulation numérique de l'impact entre une surface libre et une structure. Un exemple d'application de cette étude est la Langue de Barbarie. Ce travail de recherche vise à proposer une méthode numérique pour résoudre le problème d'interaction fluide-structure tridimensionnel de l'impact hydrodynamique. L'analyse des efforts d'interaction locaux est confrontée aux résultats analytiques issus du couplage  $2D1/2$ , supposant un écoulement incompressible.

La principale problématique dans cette partie, est comment transmettre correctement les efforts d'interactions entre le modèle du fluide et le modèle de la structure? La méthode de couplage mise en œuvre pour répondre à cette question est appelée couplage fluide structure. Cette méthode de couplage doit faire évoluer le système fluide-structure dans le temps. Nous nous intéresserons donc qu'au comportement de la structure pour des temps de calcul assez grands, pour cette raison aucune étude de stabilité ne sera proposée. Cependant, une attention particulière portera sur les efforts d'interaction à la frontière des deux systèmes. Le premier réflexe est d'imposer à la frontière du fluide et de la structure une même cinématique. Et comme la prise en compte globale de la Langue de Barbarie requiert des coûts de calcul importants au-delà même des approximations, la séparation des échelles est une phase importante. Nous nous intéressons donc dans ce qui suit qu'à l'étude locale du problème fluide-structure. Le retour à l'échelle macroscopique complet sera un volet de notre étude en perspective. Une version de la formulation ALE est mise en œuvre pour traiter, à titre d'application, l'impact hydrodynamique dans du domaine réduit.





## Chapitre 4

# Problématique de la brèche

### 4.1 Introduction

L'ouverture de la brèche a été réalisée dans la nuit du vendredi 3 au samedi 4 octobre 2003, l'écoulement étant effectif vers 8 heures du matin. Elle mesurait au départ  $4m$  de large,  $1.5m$  de profondeur sur une longueur de  $100m$ . Elle s'est retrouvée à plus de  $200m$  de large à la date du 6 octobre, et est passée à près de  $400m$  en une dizaine de jours, à  $-6m$  de profondeur en marée basse le 26 octobre. Le 20 avril 2007 elle est avait  $1300m$  de large. On se rend compte, que cette brèche est sur un cordon très sensible à l'érosion.

Certes, l'inondation à Saint-Louis a été résorbée suite à cette ouverture, mais simultanément la brèche s'est élargie rapidement. Parallèlement, les observations limnimétriques réalisées sur le fleuve indique un colmatage de l'embouchure qui constitue ainsi un obstacle à l'écoulement naturel des eaux fluviales vers la mer et par conséquent contribue à l'élargissement de la brèche. La recherche sur ce phénomène d'érosion de la Langue de Barbarie prend de plus en plus d'importance. En effet, l'érosion marine est la plus importante due aux phénomènes des marées. L'érosion fluviale n'est pas moindre, car elle est accentuée par la montée des eaux issues de l'onde de crue. L'évolution rapide de la brèche est due majoritairement aux effets conjugués du vent, des vagues de part et d'autre des courants, du niveau de l'eau et du milieu qui est constitué essentiellement que du sable fin. Ces effets conjugués ont fortement modifié l'environnement de la LB.

### 4.2 Nature de la brèche

La flèche littorale de la Langue de Barbarie est une bande de sable fragile, sensible à l'érosion par sapement des berges externes par la mer et internes par le fleuve et l'érosion éolienne. M. AÏDARA, Directeur du CRDS, a rappelé lors d'une conférence sur la brèche au CCF, le 25 mars 2004, que LOUISE (1919) et BANCAL (1923), avaient estimés à  $4.000m$  la largeur initiale de la

Langue de Barbarie, avec une vitesse moyenne de recul de  $1km$ , par siècle alors que M. SALL en 1982 estimait la même vitesse de recul à 200 à  $300m$  par siècle. En tout état de cause, la "Langue" est menacée de disparition. Dans ce contexte, l'ouverture de la brèche ne peut que renforcer les spéculations sur le danger qui guette la flèche. L'ancienne embouchure s'est définitivement ensablée et la brèche, grâce à son élargissement est devenue la nouvelle embouchure du fleuve Sénégal. Au total, les sorties, qui se sont déroulées dans de très bonnes conditions, ont permis de mesurer sur place le comportement de la brèche : érosion sédimentation et migration vers le sud. Elles nous ont permis aussi de bien appréhender le rôle de la dynamique marine sur la brèche.

L'enjeu est défini par le risque de disparition probable de la Langue de Barbarie. Ce type d'érosion rapide peut être modélisé à l'aide des modèles classiques utilisés en mécanique des fluides, en considérant qu'il s'agit d'une érosion d'interface, entre le sol et le fluide, avec transport des particules érodés par le fluide. L'érosion peut être représentée par la célérité de cette interface singulière, qui est traversée par le flux de masse érodée (Brivois et al. 2007).

### 4.3 Étude d'impact de l'élargissement de la brèche

On peut néanmoins se demander quel a été l'impact de la brèche sur les différentes activités socioéconomiques, même si elle a aussi provoqué une baisse inopinée du plan d'eau du fleuve. Grâce à des enquêtes sur les lieux d'activités des populations ciblées, notamment en plein fleuve pour les pêcheurs et sur les champs de maraîchage pour les agriculteurs, nous avons appréhendé les impacts variés de la brèche. A Saint-Louis comme dans le Gandiolais la pêche, l'agriculture et le tourisme occupent une grande partie de la population active. A la suite de l'ouverture de la brèche, ces activités ont connu des bouleversements d'ordre très différent : les activités de pêche furent facilitées pour certains et pénalisées pour d'autres, l'activité maraîchère fut durement touchée et le tourisme devenu morose. L'économie liée à ces différentes activités semble ainsi déjà affectée par cette modification [24].

Cette ouverture faite d'un recul suffisant, n'est pas sans conséquence notamment sur l'évolution de la salinité des eaux continentales. Les fractions de sable moyen et de sable fin dominent les échantillons au moins à 98%. Ceci correspond à une sensibilité au transport par saltation ou roulage pour le sable moyen et par suspension pour le sable fin, l'agent de transport étant la mer qui utilise le sable comme abrasif. Les échanges nappes latérales fleuve sont perturbés, et semblent engendrer une plus grande contamination de la lentille supérieure d'eau douce des nappes phréatiques littorales. Ajoutons à cela le fait que les vitesses du courant sont plus élevées durant le flot [26], contrairement à ce qui est observée habituellement dans l'estuaire. Lors d'un

cycle de marée, dans 80% des cas, la vitesse maximale du courant est observée durant le flot, dans 14% durant le jusant et dans 4% il y a égalité [26].

Ainsi, les Saint-Louisiens découvrirent les mouvements désormais très marqués des marées à travers les changements brusques du niveau du fleuve. Après le soulagement des autorités d'avoir évité le pire, celui de la population n'a été que de courte durée, l'étonnement a succédé, voire l'inquiétude de constater qu'en plein mois de novembre, le fleuve avait presque tari, au point que les enfants ont joué au football sous le pont Faidherbe, jusqu'à la troisième travée. Une situation très inédite, jamais vue auparavant. Petit à petit, la dynamique marine prend le dessus sur la dynamique fluviale. Les forts courants marins entraînent une sédimentation marine obligeant le fleuve à éroder la côte ; l'environnement prend un sacré coup, la brèche dévaste toute la végétation qui occupait ses environs avant l'ouverture et le Parc National de la Langue de Barbarie (PNLB) se trouve menacé car les forts courants de marées sont en train d'éroder les berges de l'îlot, par conséquent de diminuer la superficie dont disposent les oiseaux.

## 4.4 Études et Simulations déjà réalisées

Depuis ces dernières années, plusieurs chercheurs sont actifs dans l'analyse des risques associés aux ruptures de barrages. Beaucoup de logiciels ont été réalisés pour simuler les écoulements en aval d'une rupture de barrage ou de digue. Ce type d'accident affecte en moyenne un grand barrage dans le monde chaque année et s'accompagne la plus part du temps d'impact humains et matériels importants. Toutefois, l'expérience montre que ces préjudices peuvent être significativement réduits si une analyse préalable est faite en amont. On trouve une littérature abondante sur des ruptures de type renard ou surverse mais parfois trop approximatives pour reproduire une rupture naturelle.

Concernant l'état de l'art sur l'élargissement de la brèche de la Langue de Barbarie, il n'existe aucune étude particulière de modélisation ni de modèle  $1D$ ,  $2D$  ou  $3D$  pour simuler ce phénomène. Ce modèle que nous proposons ici simule l'agrandissement du conduit de la brèche de la Langue de Barbarie. La vitesse d'érosion étant petite devant la vitesse de l'écoulement, on peut négliger l'influence de la présence des particules de sable dans l'écoulement, et faire l'hypothèse d'un écoulement dilué (Lachouette et al. accepté).

## 4.5 Conclusion

La vallée du fleuve et son delta ont connu des transformations rapides et parfois brutales. La dernière en date est liée à l'ouverture d'une brèche sur la Langue de Barbarie, ce qui est apparemment peu original pour lutter contre les inondations dans la ville de Saint-Louis. Cette

ouverture a modifié radicalement le contexte environnemental du bas delta et a de multiples impacts qui viennent se superposer aux précédents et rendent toujours incertains les plans de gestion de l'ensemble de ces milieux. Les inondations en sont l'expression la plus marquante. En outre, si l'ouverture de la brèche sur la Langue de Barbarie a évité les inondations de la ville à Saint Louis, en revanche la relation de l'estuaire avec l'océan a été totalement modifiée.

Au vu de la réalité de la brèche et de la Langue de Barbarie, il est nécessaire voire fondamentale de mettre en place une ou des solutions pérenne(s) garantissant la sécurité des populations et des infrastructures humaines. Pour ce faire, les mesures techniques pouvant être employée pour réduire le risque lié à l'inondation et à la disparition de la Langue de Barbarie répondent à deux philosophies différentes :

- Réduire le volume d'eau à l'aval du barrage de Diama et donc réduire la formation d'une onde de crue brutale.
- Arrêter l'avancé catastrophique de la brèche et donc arrêter les effets destructeurs de sa disparition.

## Chapitre 5

# Modélisation et simulation du processus d'élargissement de la brèche

### 5.1 Introduction

L'objet de ce travail de modélisation et de simulation est de mettre au point une méthode pour l'étude de l'évolution de la brèche de la Langue de Barbarie (LB) dans le temps. Notre priorité dans cette problématique est d'étudier le rythme d'élargissement de la brèche et par conséquent de prédire à long terme quel est le devenir de cette dernière. Pour ce faire, on procède à une séparation d'échelle, une étude microscopique qui consiste à déterminer le profil de la structure à l'ordre d'un mètre et une étude macroscopique qui consiste elle, à faire l'assemblage de l'ensemble des microdomaines en vue de déterminer le profil global de la Langue. Dans cette thèse nous n'avons pas abordé ce dernier volet, c'est-à-dire le passage du micro au macro. Dans ce qui suit donc, l'étude est essentiellement microscopique autrement dit locale.

L'intérêt pour des problèmes couplant un fluide et une structure élastique s'est accru ces dernières années par le nombre croissant d'applications dans les différents domaines de la physique. Nous pouvons citer comme exemples l'étude de l'écoulement d'un fluide autour d'un obstacle, d'un barrage, d'une digue et, dans le cadre qui nous intéresse dans cette thèse, la déformation du profil d'une structure dans l'écoulement d'une crue au travers d'une brèche. Tous ces phénomènes sont couplés car le comportement du fluide influe sur la structure et réciproquement. Les progrès en temps de calcul et en capacité mémoire des ordinateurs permettent actuellement de réaliser des simulations numériques associées à ce type de problème. Parallèlement à cette puissance informatique il est important pour les physiciens et mathématiciens de développer en collaboration des modèles simples, robustes et réalistes constituant une approche complémentaire aux expériences micro ou macro qui peuvent être difficiles et coûteuses à réaliser.

La principale difficulté liée à l'interaction d'un fluide et d'une structure réside dans le couplage de modèles. En effet, le fluide est classiquement décrit en formulation eulérienne et la structure élastique en formulation lagrangienne. Le couplage de ces différentes formulations rend l'étude de ces systèmes très complexe, tant d'un point de vue numérique que mathématique. Une première avancée a été réalisée par Donea [21] qui introduit la méthode ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) basée sur un compromis entre les descriptions lagrangienne et eulérienne. Une autre avancée significative a été réalisée par Peskin [28] où le couplage avec la structure élastique est représenté par un terme source dans les équations du fluide. Cette technique a été utilisée avec succès dans de nombreuses applications, principalement en biomécanique.

Dans ce contexte je me suis intéressé à trois problématiques distinctes : analyse mathématique, modélisation et simulation numérique.

La première problématique est axée sur l'analyse mathématique de modèles de couplage fluide-structure. La principale difficulté rencontrée dans ce type de problème est la formulation différente de chaque constituant du couplage. Un résultat d'existence récent a été obtenu par Coutand et Shkoller [123, 124] en formulant le problème de manière complètement lagrangienne. Le modèle proposé par Cottet et Maitre [13, 16] ouvre de nouvelles perspectives en formulant le problème fluide-structure de manière complètement eulérienne permettant de décrire le couplage fluide-structure comme un fluide complexe. Des résultats d'existence ont été obtenus récemment pour ce type de fluide [22]. Cette partie est consacrée à la modélisation du problème qui consiste à écrire une formulation complète couplant toutes les inconnues du problème. Au vu de nos priorités nous n'avons pas proposé l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution du problème couplé. Cette partie nous permet également de définir les conditions aux limites de notre problème et ainsi de poser le cadre pour notre simulation avec un logiciel de calcul.

La deuxième problématique concerne l'optimisation de formes géométriques qui consiste à trouver une surface qui minimise une fonctionnelle dépendant de la géométrie de la surface.

La troisième problématique concerne la résolution numérique de problèmes de couplage fluide-structure. La nouvelle méthode proposée dans [13, 16] permet la mise au point de méthodes numériques efficaces pour simuler l'évolution de l'interface fluide-structure dans le temps. En effet, la formulation eulérienne permet une discrétisation avec des schémas aux éléments finis du fluide, des forces élastiques et des forces de courbure introduites dans la partie précédente. Puis, une fois calculés les champs en statique, on observe l'évolution proprement dite, le déplacement des bordures par sapement de l'eau du fleuve ou de la mer en tenant compte outre les équations, les contraintes de déformation. Ainsi, on adopte la simulation de l'érosion progressive de la LB.

## 5.2 Modélisation du processus d'élargissement de la brèche

On s'intéresse maintenant au phénomène d'élargissement de la brèche. Ce genre de phénomène (ou son contraire - l'ensablement d'un port) a fait l'objet de nombreuses investigations qui ont toutes leurs avantages et leurs inconvénients. Mais leur caractéristique commune est de considérer ce phénomène qu'à une seule échelle. Or, s'il est exact que le profil de la côte doit être regardé à l'échelle macroscopique (de l'ordre du km), le phénomène d'érosion est lui, très local (de l'ordre du m). En effet, pour diverses raisons (géométrie du fond, ...) la vitesse avec laquelle l'eau est jetée sur le rivage n'a aucune raison d'être constante sur une longueur de l'ordre du km. Cela est vrai à l'échelle du mètre, voire de la dizaine de mètres

Le principe de la modélisation que nous proposons ici est basé sur cette remarque. Nous considérons donc deux échelles : la première qui est l'échelle "macroscopique" sera associée à la détermination du profil de la côte et la seconde qui est l'échelle "microscopique" sera associée à l'érosion elle-même.

### 5.2.1 Détermination du profil

De nombreux travaux ont déjà été publiés sur l'évolution du profil d'une côte. Conformément à [18, 33, 46], nous travaillons dans un plan (horizontal) et nous notons  $f(x, y; t)$  le profil de la côte au point de coordonnées  $(x, y)$  et à l'instant  $t$ . Cette fonction profil est liée au flux de matière érodée  $Q$  par la relation

$$-D \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t} = \nabla Q$$

Où  $D$  représente la hauteur de section de la structure.

Une coupe de la structure du milieu poreux [14] est illustrée sur la figure ci-dessous :

### 5.2.2 Étude locale du processus d'érosion

On considère une portion de la Langue de Barbarie (hauteur  $H_{LB}$ , largeur  $l_{LB}$ ) traversé par le flux issue de l'étude  $2D1/2$ . Le niveau d'eau amont  $h$ , est variable. La structure milieu poreux se décompose en deux parties, une partie à la hauteur du flux entrant considérée comme remplie de l'eau et la partie supérieure remplie d'air.



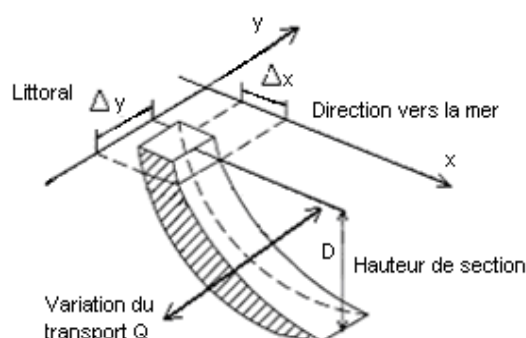


FIG. 5.1: Section de plage

### 5.2.2.1 Modélisation et formalisme

Nous nous plaçons maintenant en un point M du profil de la côte. En ce point, nous connaissons, de par l'étude précédente les caractéristiques du champ de vitesse (orientation et intensité) et de pression (intensité). Le voisinage de ce point représente une fraction de la LB et nous pouvons toujours imaginer un domaine comprenant trois parties :

- un domaine représentant une fraction de la mer ou du fleuve
- un domaine représentant le sable de la dune qui est susceptible d'être mouillé
- un domaine, situé au dessus du précédent et représentant le sable de la dune qui n'est pas atteint par l'eau (voir figure) :

On note chacun de ces domaines respectivement par domaine fluide, domaine fluide-structure et domaine structure propre. Cette configuration du domaine fluide structure est illustrée dans le plan par :

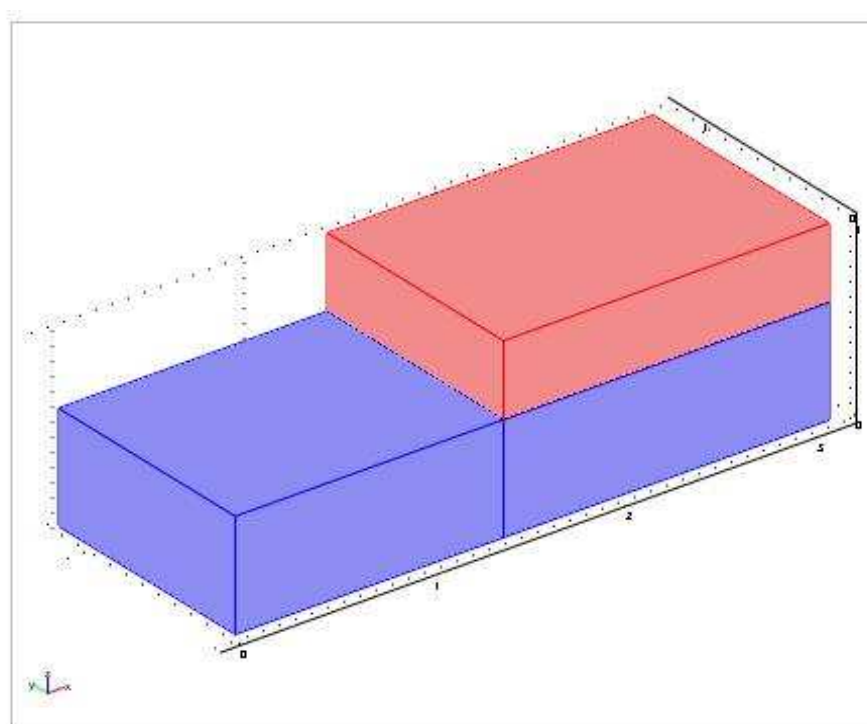


FIG. 5.2: Configuration locale du domaine fluide-structure

Nous formalisons le phénomène d'érosion local comme le résultat d'un problème mathématique dans lequel interviennent les équations d'état suivantes :

- ***Le couplage 2D1/2 de la première partie*** (Saint-Venant  $2D$  et l'équation de conservation de l'eau). En effet, il est nécessaire donc de connaître au droit de la portion de la dune : le débit de pointe, la hauteur maximale, l'hydrogramme, le limnigramme ou plusieurs de ses paramètres pour obtenir la vitesse de propagation du fluide dans la partie et la quantité de particules susceptible d'être arrachée (le déplacement local). L'étude de ce déplacement se fait à partir de l'écoulement du fluide autour de la structure. La vitesse d'écoulement et la pression sur le milieu poreux sont calculées donc à partir du couplage  $2D1/2$  précédent.
- ***L'élasticité linéaire couplée à la loi de Darc***. En effet, la description de l'écoulement en milieu poreux est fondée sur la combinaison de la loi de Darcy et une contrainte sur la matrice solide du milieu poreux. Lesquelles grandeurs font intervenir différentes autres grandeurs (pression, teneur en eau et continuité hydraulique) dont l'interdépendance est précisée en fonction du milieu et du modèle hydraulique.

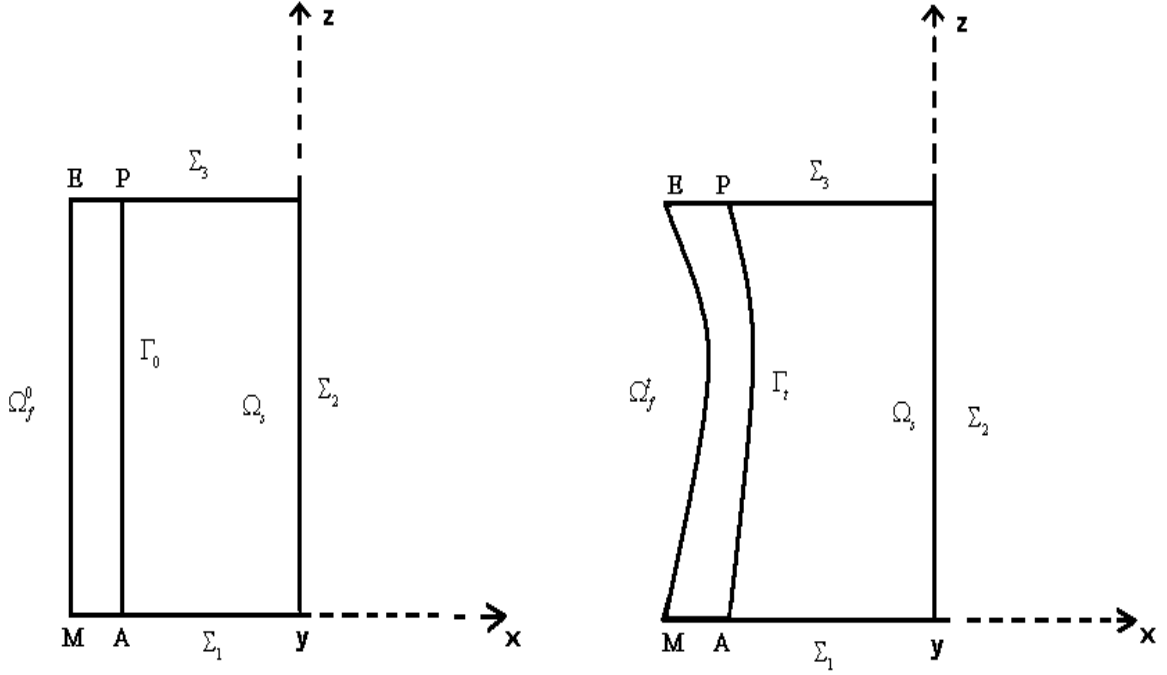


FIG. 5.3: Configuration du domaine fluide structure initiale et intermédiaire (resp.)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho_s \partial_t^2 u - \nabla \cdot \sigma_s(u) = f_s, & \text{dans } \Omega_s \times (0, T) \\ u = 0, & \text{dans } \Gamma_D \times (0, T) \\ \sigma_s(u) \cdot n = 0, & \text{dans } \Gamma_N \times (0, T) \\ u(X, 0) = u^0(X), & \text{dans } \Omega_s \\ \partial_t u(X, 0) = \dot{u}^0(X) & \text{dans } \Omega_s \end{array} \right.$$

où  $\sigma_s(u) = \lambda_s(\nabla \cdot u)I_2 + 2\mu_s \varepsilon_s(u)$ , et  $\varepsilon_s(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T)$

avec  $\Gamma_D = [MA] \cup [PE]$ ,  $\Gamma_N = [ME]$

$$\delta_s S \partial_t h + \nabla \cdot \left[ -\delta_k \frac{\kappa}{\eta} \nabla (p_{dr} + gD\rho_{fluide}) \right] = \delta_D Q_S \quad \text{dans } \Omega_s$$

$$h = \frac{p_{dr}}{g\rho_{fluide} + D}$$

On impose également la continuité des flux au niveau des nœuds, arrêtes ou facettes du domaine discrétisé. La non linéarité de ses expressions, conjuguée à un schéma tempo-

rel implicite nécessite l'utilisation d'une méthode itérative. Les paramètres perméabilité, masse volumique, viscosité, terme d'accumulation et facteur d'échelle sont donnés pour la structure. Ces différents paramètres intervenant sont expliqués dans le tableau ci-dessous :

Constante	Expression	Valeur	Observations
$\mathcal{S}_s$	1	1	Facteur d'échelle (Coefficient d'échelle stockage)
S	1	1	Terme d'accumulation ( $1/m$ )
$\mathcal{S}_k$	$1/\text{porosité}$	1/0.3	Facteur d'échelle (coefficient d'échelle flux) 0.3 est la porosité du sable fin
$\rho_{\text{fluide}}$	1005.8	1005.8	Densité du fluide ( $kg/m^3$ )
$\eta$	$10^{-3}$	0.001	Viscosité du fluide (Pa.s)
$\mathcal{Q}_s$	1	1	Facteur d'échelle (coefficient d'échelle Source)
$Q_s$	0	0	Source liquide ( $1/s$ )
$\kappa$	$10^{-10}$	$10^{-10}$	Perméabilité du sable fin ( $m^2$ )
$g$	9,81	9,81	Accélération due à la gravité ( $m/s^2$ )
$\rho_{\text{air}}$	1.2	1.2	Densité de l'air
$p_{dr}$	-	-	Pression issue de la loi de Darcy

FIG. 5.4: Tableau des constantes

- *l'équation associée à la modification du profil de la structure.* En effet, Ce problème d'érosion local est particulièrement complexe puisque non seulement il faut résoudre les équations de Darcy pour le fluide dans le milieu poreux, mais en plus il faut tenir compte de l'évolution de son profil. Ce profil que nous noterons  $f(x, y, t)$  gouverne l'écoulement par le jeu des conditions aux limites sur cette paroi, mais cette paroi évolue elle-même car, de par l'écoulement, des particules de sables sont arrachées et entraînées par le reflux et vont se redéposer éventuellement plus loin : un flux de matière noté  $Q$  est créé, un flux instantané de matières transportés par l'écoulement. L'ensemble modifie (à une échelle de temps supposée très longue par rapport au temps du fluide) la forme de la paroi de par une loi de conservation :

$$-D \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t} = \nabla Q$$

La démarche consiste à écrire que  $Q$  est proportionnel à l'évolution de la dune qui lui-même est proportionnel à la vitesse près de la paroi. L'équation d'évolution peut être résolue de manière analytique, mais pour plus de "réalisme" il faut la résoudre numériquement. Cela permettra d'inclure plus facilement la configuration locale, les données sur les flux entrant.

Cette équation sera couplée avec les systèmes précédents pour obtenir le profil de la structure à tout moment.

A ces trois équations d'état, il faut associer les conditions de couplage suivantes.

– *Transformation ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian)*

Soit  $\hat{\Omega}_s$  un domaine de référence solide fixe et soit  $A_t, t \in [0, T]$  une famille de transformations, telle que

$$A_t(\hat{x}) = x, \forall \hat{x} \in \hat{\Omega}_s, A_t(\hat{\Omega}_s) = \Omega_s^t$$

On définit la vitesse d'arrachement  $v_D$  de particule dans la structure par :

$$v_D(x, t) = \frac{\partial A_t}{\partial t}(\hat{x}) = \frac{\partial A_t}{\partial t}(A_t^{-1}(x))$$

En outre, on définit la dérivée ALE en temps de la hauteur du fluide dans la structure par

$$\left. \frac{\partial h}{\partial t} \right|_{\hat{x}}(x, t) = \frac{\partial \hat{h}}{\partial t}(\hat{x}, t)$$

La relation entre la dérivée Eulérienne et la dérivée ALE est

$$\left. \frac{\partial h}{\partial t} \right|_{\hat{x}} = \frac{\partial h}{\partial t} + (\boldsymbol{\vartheta} \cdot \nabla) h$$

Une relation entre la hauteur du fluide et la vitesse d'arrachement de particules.

– *à l'interface domaine fluide-structure* : Dans chaque micro domaine de la structure que nous considérons, on définit des conditions de couplage au niveau de l'interface suivantes :

**La continuité des vitesses** :  $v(X + u(X, t), t) = \frac{\partial u}{\partial t}(X, t)$ , sur  $\Gamma_0 \times (0, T)$

**Égalité des contraintes** :  $(\sigma_f \cdot n)_{(X+u(X,t),t)} = -(\sigma_s \cdot n)_{(X,t)}$  sur  $\Gamma_0 \times (0, T)$

**L'action de l'eau sur la structure** :  $p_f = p_{dr}$  où  $p_{dr}$  est la vitesse de Darcy

$$[\eta(\nabla u + (\nabla u)^T)] \bullet n = 0$$

**l'action de la structure sur l'eau** :  $n \bullet \delta_k \frac{\kappa}{\eta} \nabla(p_{dr} + gD\rho_{fluide}) = N_0$

$$h = \frac{p_{dr}}{g\rho_{fluide}} + D$$

où  $N_0$  est le flux sortant dans le domaine fluide.

**Enfin, on considère les équations aux limites suivantes :**

- *imperméabilité du fond qui se traduit par une condition de non glissement (l'eau ne pénètre pas la paroi) :  $u = 0$*
- *une condition de glissement/symétrie sur les côtés :*

$$n \bullet u = 0 \quad [\eta(\nabla u + (\nabla u)^T)] \bullet n = 0$$

**Remarque :** Il s'agit d'un problème couplé que nous résolvons par un processus itératif entre des solveurs propres à chaque équation qui sont couplées par les relations d'interface définies précédemment.

Dans la réalisation de ses couplages d'autres paramètres techniques ont été nécessaires. Ils sont consignés dans ce tableau :

Paramètre	Expression	Valeur	Observation
$X_{f\_eau}$	$10^{-2}$	0.01	Compressibilité de dans la structure ( $1/ pa$ )
$X_{f\_air}$	1	1	Compressibilité de l'air dans la structure ( $1/ pa$ )
$X_{p\_sable}$	1	1	Compressibilité du sable de la structure ( $1/ pa$ )
$\eta_{air}$	$1.81 * 10^{-5}$	$1.81 * 10^{-5}$	Viscosité de l'air
$P_{atm}$	101333	101333	Pression atmosphérique
$K_s$	$10^{-9}$	$10^{-9}$	Conductivité hydraulique saturée ( $m / s$ )

FIG. 5.5: Tableau des paramètres

### 5.2.2.2 Algorithme de résolution du problème fluide-structure

### 5.2.2.3 Formulation faible du problème couplé

On établit une formulation variationnelle avec les variables vitesses et hauteurs. La vitesse et la hauteur doivent appartenir respectivement à  $H_0^1(\Omega_f)$  et  $L^2(\Omega_f)$ .  $L^2(\Omega_f)$  est l'ensemble des fonctions de carré intégrable sur le domaine et  $H_0^1(\Omega_f)$  le sous domaine de  $L^2(\Omega_f)$  des fonctions dont les dérivées sont de carrée intégrable, et qui sont de plus nulles sur la frontière de  $\Omega_f$ . Nous ne reprendrons pas ici les démonstrations établies dans la thèse de Nicole Goutal [55]. Elles supposent des conditions aux limites de types Dirichlet pour la vitesse ; elles resteraient à étendre aux cas des autres conditions aux limites.

Soient  $W_s = \left\{ \varphi_s \in (H^1(\Omega_s))^2, \varphi_s = 0 \text{ sur } \Gamma_D \right\}$ ,  $Q_f = L^2(\Omega_f^t)$ ,

$W_f = \left\{ \varphi_f \in (H^1(\Omega_f^t))^2; \varphi_f = 0 \text{ sur } \Sigma_2 \right\}$  des fonctions test pour la structure ( $W_s$ ), pour le fluide ( $W_f$ ) et la pression du fluide  $p \in Q_f$ . On pose  $\varphi_s = \varphi_f \circ T_u$  où

$T_u(X) = X + u(X, t)$  sur  $\Gamma_0$  alors la formulation faible du problème couplé s'écrit :

$$\int_{\Gamma_t} (\sigma_f \cdot n) \bullet \varphi_f + \int_{\Gamma_0} (\sigma_s \cdot n) \bullet \varphi_s = 0$$

La multiplication par des fonctions test et l'intégration sur le domaine donnent les équations suivantes :

Trouver

$$(h, u, v) \in W_f \times W_s \times Q_F \text{ avec } v(X + u(X, t), t) = \frac{\partial u}{\partial t}(X, t) \text{ sur } \Gamma_0 \times (0, T)$$

tels que :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_f^t} \frac{\partial h}{\partial t} \Big|_{\hat{x}} \cdot \varphi_f + \int_{\Omega_f^t} (\boldsymbol{\vartheta} \cdot \nabla) h \cdot \varphi_f + \int_{\Omega_f^t} h (\nabla \bullet v) \cdot \varphi_f = 0 \\ & \int_{\Omega_f^t} \frac{\partial v_1}{\partial t} \cdot \varphi_f + \int_{\Omega_f^t} (gh + p_{atm}) \nabla(h + \eta) \cdot \varphi_f + \int_{\Omega_s} \rho_s \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} \cdot \varphi_s - \int_{\Omega_s} \nabla \cdot \sigma_s(u) \cdot \varphi_s \\ & \quad = \int_{\Omega_f^t} \sqrt{|\nabla(h + \eta)|^2 + 1} f_1 \cdot \varphi_f + \int_{\Omega_f^t} \sqrt{|\nabla \eta|^2 + 1} \hat{k} \frac{v_1}{h} \cdot \varphi_f + \int_{\Omega_s} f_1 \cdot \varphi_s d\Omega_s \\ & \int_{\Omega_f^t} \frac{\partial v_2}{\partial t} \cdot \varphi_f + \int_{\Omega_f^t} (gh + p_{atm}) \nabla(h + \eta) \cdot \varphi_f + \int_{\Omega_s} \rho_s \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} \cdot \varphi_s - \int_{\Omega_s} \nabla \cdot \sigma_s(u) \cdot \varphi_s \\ & \quad = \int_{\Omega_f^t} \sqrt{|\nabla(h + \eta)|^2 + 1} f_2 \cdot \varphi_f + \int_{\Omega_f^t} \sqrt{|\nabla \eta|^2 + 1} \hat{k} \frac{v_2}{h} \cdot \varphi_f + \int_{\Omega_s} f_2 \cdot \varphi_s d\Omega_s \\ & \int_{\Omega_s} \frac{\partial f(x, y, t)}{\partial t} \cdot \varphi_s d\Omega + \int_{\Omega_f^t} a \nabla v \cdot \varphi_f d\Omega = 0 \end{aligned}$$

$$\forall (\varphi_f, \varphi_s) \in W_f \times W_s \text{ avec } \varphi(X + u(X, t), t) = \varphi_s(\varphi_s(X, t))$$

#### 5.2.2.4 Quelles que définitions

$\hat{\Omega}^S = \Omega_n^S$  le domaine de référence de la structure et  $\Gamma_n$  l'interface.

On définit la vitesse de transformation du domaine  $\boldsymbol{\vartheta}^n = (\vartheta_1^n, \vartheta_2^n)^T$  par

$$\begin{cases} \vartheta^n &= \mathbf{v}^n, & \text{dans } \Omega_n^S \\ \vartheta^n &= 0, & \text{sur } \partial\Omega_n^S \setminus \Gamma_n \\ \vartheta^n &= -\frac{\kappa}{\mu} \nabla \mathbf{p}, & \text{sur } \Gamma_n. \end{cases}$$

$\forall n = 0, \dots, N-1$ , on définit  $\mathcal{A}_{t_{n+1}} : \overline{\Omega}_n^F \longrightarrow \mathbb{R}^2$  par

$$\mathcal{A}_{t_{n+1}}(\hat{x}_1, \hat{x}_2) = (\hat{x}_1 + \Delta t \vartheta_1^n, \hat{x}_2 + \Delta t \vartheta_2^n).$$

On pose  $\Omega_{n+1}^S = \mathcal{A}_{t_{n+1}}(\Omega_n^S)$  et  $\Gamma_{n+1} = \mathcal{A}_{t_{n+1}}(\Gamma_n)$ . On définit  $\mathbb{T} = \mathcal{A}_{t_n} \circ \mathcal{A}_{t_{n-1}} \cdots \circ \mathcal{A}_{t_1}$  et on pose  $\Gamma_n = \mathbb{T}(\Gamma_0)$ . De plus on définit

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}}^{n+1}(\hat{\mathbf{x}}) &= \mathbf{v}^{n+1}(\mathbf{x}), \quad \forall \hat{\mathbf{x}} \in \Omega_n^F, \mathbf{x} = \mathcal{A}_{t_{n+1}}(\hat{\mathbf{x}}) \in \Omega_{n+1}^F. \\ \hat{\mathbf{p}}^{n+1}(\hat{\mathbf{x}}) &= \mathbf{p}^{n+1}(\mathbf{x}), \quad \forall \hat{\mathbf{x}} \in \Omega_n^S, \mathbf{x} = \mathcal{A}_{t_{n+1}}(\hat{\mathbf{x}}) \in \Omega_{n+1}^S. \end{aligned}$$

### 5.2.2.5 Formulation faible dicrète du problème couplé

Suivant le choix de schéma numérique que nous avons choisi sur les différentes variables, on a en fait, dans les équations des termes  $h$ ,  $u$ ,  $v$  qui subsistent pour lesquels il faut préciser s'il s'agit des variables prises au temps  $t^n$  ou  $t^{n+1}$ . Pour éviter les fortes tendances du schéma semi implicite que nous adoptons ici à diverger, on se donne une marge de sécurité en écrivant pour une fonction  $f$

$$f = \theta f^{n+1} + (1 - \theta) f^n \quad \text{avec} \quad \theta > 0.5 \quad \text{tout en restant proche}$$

Nous noterons dans la suite :

- $\psi_i^h$  : base au point  $i$  pour l'écriture de la hauteur ;
- $\varphi_i^h$  : fonction test au point  $i$  pour l'équation de continuité ;
- $\psi_i^v$  : base au point  $i$  pour l'écriture des composantes de la vitesse du fluide ;
- $\varphi_i^v$  : fonction test au point  $i$  pour les équations de quantité de mouvement ;
- $\psi_i^u$  : base au point  $i$  pour l'écriture des composantes de la vitesse du fluide dans la structure ;
- $\varphi_i^v$  : fonction test au point  $i$  pour l'équation de la structure (élasticité linéaire).

A partir des équations données dans la formulation faible, nous décomposerons les opérations en deux étapes : écriture de l'intégrale sur le domaine avec multiplication par des fonctions test,



puis de décomposition des fonctions inconnues sur les bases.

Pour tout  $i$  degré de liberté de la hauteur compris entre 1 et  $nph$  :

$$\int_{\Omega_f^t} \frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} \varphi_i^h d\Omega + \int_{\Omega_f^t} (v^n \nabla h) \varphi_i^h d\Omega + \int_{\Omega_f^t} h^n (\nabla \cdot v) \varphi_i^h d\Omega = 0$$

Pour tout  $i$  degré de liberté de vitesse compris entre 1 et  $npv_1$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_f^t} \frac{v_1^{n+1} - v_1^n}{\Delta t} \varphi_i^v d\Omega - \int_{\Omega_f^t} (gh^n + p_{atm}) \frac{\partial(h + \eta)}{\partial x} \varphi_i^v d\Omega + \int_{\Omega_s} \rho_s \frac{u_1^{n+1} - 2u_1^n + u_1^{n-1}}{\Delta t^2} \varphi_i^u d\Omega \\ + \int_{\Omega_s} (\nabla \cdot \sigma^s(u)) \varphi_i^u d\Omega = \int_{\Omega_f^t} \theta_h \frac{\partial((h + \eta)^{n+1} - (h + \eta)^n)}{\partial x} \varphi_i^v d\Omega + \int_{\Omega_f^t} \frac{\partial \eta^n}{\partial x} \hat{k} f_x \varphi_i^v \\ + \int_{\Omega_s} f_x \varphi_i^u d\Omega. \end{aligned}$$

Pour tout  $i$  degré de liberté de vitesse compris entre 1 et  $npv_2$  :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_f^t} \frac{v_2^{n+1} - v_2^n}{\Delta t} \varphi_i^v d\Omega - \int_{\Omega_f^t} (gh^n + p_{atm}) \frac{\partial(h + \eta)}{\partial y} \varphi_i^v d\Omega + \int_{\Omega_s} \rho_s \frac{u_2^{n+1} - 2u_2^n + u_2^{n-1}}{\Delta t^2} \varphi_i^u d\Omega \\ + \int_{\Omega_s} (\nabla \cdot \sigma^s(u)) \varphi_i^u d\Omega = \int_{\Omega_f^t} \theta_h \frac{\partial((h + \eta)^{n+1} - (h + \eta)^n)}{\partial y} \varphi_i^v d\Omega + \int_{\Omega_f^t} \frac{\partial \eta^n}{\partial y} \hat{k} f_y \varphi_i^v \\ + \int_{\Omega_s} f_y \varphi_i^u d\Omega. \end{aligned}$$

$$\int_{\Omega_s} \frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t} \varphi_i^v d\Omega + \int_{\Omega_f^t} a \nabla v \cdot \varphi_i^v d\Omega = 0.$$

Décomposition des fonctions suivant des bases comme indiquées plus haut, on écrit maintenant :

$$h = \sum_{j=1}^{nph} h_j \psi_j^h, \quad v_i = \sum_{j=1}^{npv_i} v_j \psi_j^{v_i}, \quad u_i = \sum_{j=1}^{np u_i} u_j \psi_j^{u_i}, \quad f_i = \sum_{j=1}^{np v_i} f_j \psi_j^{v_i}$$

Après cette décomposition, les équations deviennent :

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{nph} \frac{h_j^{n+1} - h_j^n}{\Delta t} \int_{\Omega_f^t} \psi_j^h \varphi_i^h d\Omega + \sum_{j=1}^{nph} h_j \int_{\Omega_f^t} (v^n \nabla \psi_j^h) \varphi_i^h d\Omega + \int_{\Gamma_t} h^n \vec{v} \cdot \vec{n} \varphi_i^h d\Gamma \\ - \sum_{j=1}^{npv} \vec{v}_j \int_{\Omega_f^t} \psi_j^v (\nabla(h^n \varphi_i^h)) d\Omega = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_j^{npv} \frac{v_1^{n+1} - v_1^n}{\Delta t} \int_{\Omega_f^t} \psi_j^v \varphi_i^v d\Omega + \sum_j^{nph} h_j \int_{\Omega_f^t} (gh^n + p_{atm}) \frac{\partial(\psi_i^h)}{\partial x} \varphi_i^v d\Omega \\ + \sum_{j=1}^{npu} \rho_s \frac{u_1^{n+1} - 2u_1^n + u_1^{n-1}}{\Delta t^2} \int_{\Omega_s} \psi_j^u \varphi_i^u d\Omega + \int_{\Gamma_t} \sigma^s(u) \cdot n \varphi_i^u d\Gamma_t - \sum_{j=1}^{npu} \sigma_j^s(u) \int_{\Omega_s} (\nabla \psi_j^u \nabla \varphi_i^u d\Omega \\ = \sum_{j=1}^{nph} ((h + \eta)_j^{n+1} - (h + \eta)_j^n) \int_{\Omega_f^t} \theta_h \frac{\partial \psi_j^h}{\partial x} \varphi_i^h d\Omega + \int_{\Omega_f^t} \frac{\partial \eta}{\partial x} \hat{k} f_x \varphi_i^v d\Omega + \sum_j^{npu} f_x \int_{\Omega_s} \psi_i^u \varphi_i^u d\Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sum_j^{npv} \frac{v_2^{n+1} - v_2^n}{\Delta t} \int_{\Omega_f^t} \psi_j^v \varphi_i^v d\Omega + \sum_j^{nph} h_j \int_{\Omega_f^t} (gh^n + p_{atm}) \frac{\partial(\psi_i^h)}{\partial y} \varphi_i^h d\Omega \\ + \sum_{j=1}^{npu} \rho_s \frac{u_2^{n+1} - 2u_2^n + u_2^{n-1}}{\Delta t^2} \int_{\Omega_s} \psi_j^u \varphi_i^u d\Omega + \int_{\Gamma_t} \sigma^s(u) \cdot n \varphi_i^u d\Gamma_t - \sum_{j=1}^{npu} \sigma_j^s(u) \int_{\Omega_s} (\nabla \psi_j^u \nabla \varphi_i^u d\Omega \\ = \sum_{j=1}^{nph} ((h + \eta)_j^{n+1} - (h + \eta)_j^n) \int_{\Omega_f^t} \theta_h \frac{\partial \psi_j^h}{\partial y} \varphi_i^h d\Omega + \int_{\Omega_f^t} \frac{\partial \eta}{\partial y} \hat{k} f_y \varphi_i^v d\Omega + \sum_j^{npu} f_y \int_{\Omega_s} \psi_i^u \varphi_i^u d\Omega \end{aligned}$$

$$\sum_{j=1}^{npv} \frac{f^{n+1} - f^n}{\Delta t} \int_{\Omega_s} \psi_j^v \varphi_i^v d\Omega + \sum_{j=1}^{npv} v_j \int_{\Omega_f^t} a \nabla \psi_j^v \varphi_i^v d\omega = 0.$$

Avant d'arriver au système linéaire, il s'agit de tenir compte des conditions aux limites exprimées plus haut :

- dans la première équation la condition d'imperméabilité annule le terme de bord

$$\int_{\Gamma_t} h \vec{v} \cdot \vec{n} \varphi_i^h d\Omega = 0$$

– dans chacune des deux équations suivantes le terme de bord est nul

$$\int_{\Gamma_t} \sigma^s(u) \cdot n \varphi_i^u d\Gamma$$

Les équations deviennent alors :

$$\sum_{j=1}^{nph} \frac{h_j^{n+1} - h_j^n}{\Delta t} \int_{\Omega_f^t} \psi_j^h \varphi_i^h d\Omega + \sum_{j=1}^{nph} h_j \int_{\Omega_f^t} (v^n \nabla \psi_j^h) \varphi_i^h d\Omega - \sum_{j=1}^{npv} \vec{v}_j \int_{\Omega_f^t} \psi_j^v (\nabla(h^n \varphi_i^h)) d\Omega = 0$$

$$\begin{aligned} & \sum_j^{npv} \frac{v_1^{n+1} - v_1^n}{\Delta t} \int_{\Omega_f^t} \psi_j^v \varphi_i^v d\Omega + \sum_j^{nph} h_j \int_{\Omega_f^t} (gh^n + p_{atm}) \frac{\partial(\psi_i^h)}{\partial x} \varphi_i^v d\Omega \\ & + \sum_{j=1}^{npu} \rho_s \frac{u_1^{n+1} - 2u_1^n + u_1^{n-1}}{\Delta t^2} \int_{\Omega_s} \psi_j^u \varphi_i^u d\Omega - \sum_{j=1}^{npu} \sigma_j^s(u) \int_{\Omega_s} (\nabla \psi_j^u \nabla \varphi_i^u) d\Omega \\ & = \sum_{j=1}^{nph} ((h + \eta)_j^{n+1} - (h + \eta)_j^n) \int_{\Omega_f^t} \theta_h \frac{\partial \psi_j^h}{\partial x} \varphi_i^h d\Omega + \int_{\Omega_f^t} \frac{\partial \eta}{\partial x} \hat{k} f_x \varphi_i^u d\Omega + \sum_j^{npu} f_x \int_{\Omega_s} \psi_i^u \varphi_i^u d\Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_j^{npv} \frac{v_2^{n+1} - v_2^n}{\Delta t} \int_{\Omega_f^t} \psi_j^v \varphi_i^v d\Omega + \sum_j^{nph} h_j \int_{\Omega_f^t} (gh^n + p_{atm}) \frac{\partial(\psi_i^h)}{\partial y} \varphi_i^h d\Omega \\ & + \sum_{j=1}^{npu} \rho_s \frac{u_2^{n+1} - 2u_2^n + u_2^{n-1}}{\Delta t^2} \int_{\Omega_s} \psi_j^u \varphi_i^u d\Omega - \sum_{j=1}^{npu} \sigma_j^s(u) \int_{\Omega_s} (\nabla \psi_j^u \nabla \varphi_i^u) d\Omega \\ & = \sum_{j=1}^{nph} ((h + \eta)_j^{n+1} - (h + \eta)_j^n) \int_{\Omega_f^t} \theta_h \frac{\partial \psi_j^h}{\partial y} \varphi_i^h d\Omega + \int_{\Omega_f^t} \frac{\partial \eta}{\partial y} \hat{k} f_y \varphi_i^v d\Omega + \sum_j^{npu} f_y \int_{\Omega_s} \psi_i^u \varphi_i^u d\Omega \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sum_{j=1}^{npv} \frac{f_1^{n+1} - f_1^n}{\Delta t} \int_{\Omega_s} \psi_j^v \varphi_i^v d\Omega + \sum_{j=1}^{npv} v_j \int_{\Omega_f^t} a \frac{\partial \psi_j^v}{\partial x} \varphi_i^v d\Omega = 0. \\ & \sum_{j=1}^{npv} \frac{f_2^{n+1} - f_2^n}{\Delta t} \int_{\Omega_s} \psi_j^v \varphi_i^v d\Omega + \sum_{j=1}^{npv} v_j \int_{\Omega_f^t} a \frac{\partial \psi_j^v}{\partial x} \varphi_i^v d\Omega = 0. \end{aligned}$$

Les équations obtenues ci-dessus, ne contiennent que de combinaisons linéaires de nos incon-

nues, elles constituent donc un système linéaire que l'on peut mettre sous forme  $AX = B$ , où  $X$  est le vecteur des inconnues constitué de 3 vecteurs de tailles respectives  $nph$ ,  $npv$ ,  $npu$ .

Les différentes composantes de la matrice  $A$  sont :

– Les matrices de masse :

$$M_{ij}^h = \int_{\omega_t} \psi_j^h \varphi_i^h$$

$$M_{ij}^v = \int_{\omega_f^t} \psi_j^v \varphi_i^v$$

$$M_{ij}^u = \int_{\omega_s} \psi_j^u \varphi_i^u$$

– Les matrices de convection :

$$T_{x,ij}^h(h) = \int_{\Omega_f^t} (gh^n + p_{emphatm}) \frac{\partial \psi_j^h}{\partial x} \varphi_i^h$$

$$T_{y,ij}^h(h) = \int_{\Omega_f^t} (gh^n + p_{emphatm}) \frac{\partial \psi_j^h}{\partial y} \varphi_i^h$$

– Les matrices de diffusion :

$$D_{ij}^u = \int_{\omega_s} \nabla \psi_j^u \nabla \varphi_i^u d\Omega$$

– Les matrices de type “gradient” ou “divergence” :

$$B_{x,ij}^{vh}(h) = - \int_{\Omega_f^t} \psi_j^v \frac{\partial}{\partial x} (h^n \varphi_i^h) d\Omega$$

$$B_{y,ij}^{vh}(h) = - \int_{\Omega_f^t} \psi_j^v \frac{\partial}{\partial y} (h^n \varphi_i^h) d\Omega$$

$$C_{ij}^{vhx} = \int_{\Omega_f^t} \frac{\partial \psi_j^h}{\partial x} (\varphi_i^u) d\Omega$$

$$C_{ij}^{vhy} = \int_{\Omega_f^t} \frac{\partial \psi_j^h}{\partial y} (\varphi_i^u) d\Omega$$

### 5.2.2.6 Algorithme de résolution du problème couplé

- $v^n$ ,  $p^n$  sont connues, les caractéristiques du fluide résultats de la première partie ;
- On suppose qu'on connaît  $u^n$ ,  $u^{n-1}$ ,  $f^n$  ;
- On résout les équations de la structure avec les conditions d'interface pour obtenir  $u^{n+1}$  ;

- On résout les équations du fluide avec continuité des vitesses à l'interface pour obtenir  $v^{n+1}, p^{n+1}$  ;
- On calcul le nouveau profil de l'interface  $f^{n+1}$

Une démonstration de convergence de notre algorithme à petit nombre de Reynolds a également été donnée par Christine Bernardi et Olivier Pironneau [56].

### 5.2.3 Simulation numérique du problème local

D'après l'étude précédente, nous savons qu'en un point donné du domaine on peut déterminer la vitesse et la pression de l'eau pour chaque pas de temps. Les simulations nous montrent que près de la structure le mouvement des entrées et sorties du champ des vitesses et de la pression issues du couplage  $2D1/2$  sont perpendiculaires à la structure. Comme c'est illustré dans les figures ci-dessous :

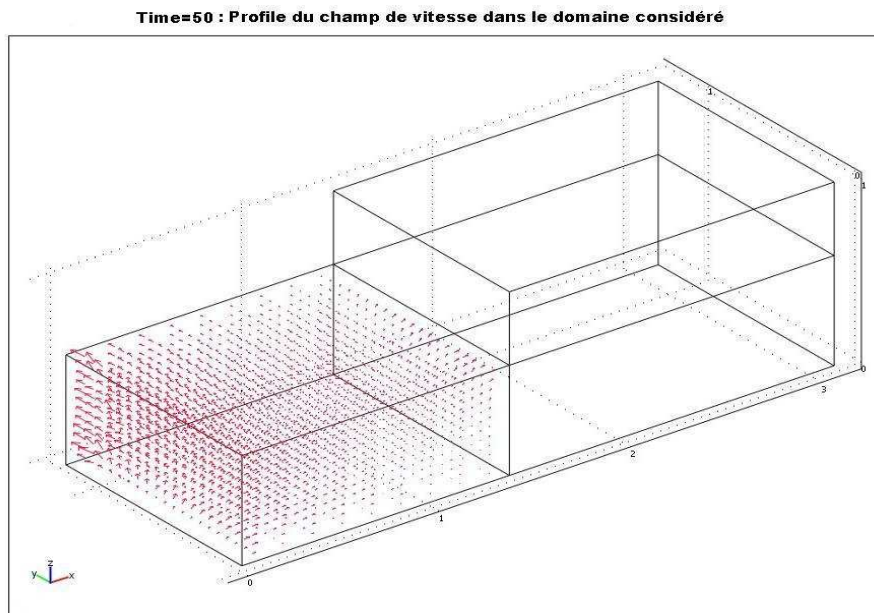


FIG. 5.6: Le profil local du champ des vitesses

Les flèches déterminent le profil du champ de vitesses localement, au cinquantième pas de temps. Ce profil montre qu'au niveau de l'interface l'écoulement est légèrement dévié vers le haut. La vitesse du fluide dans la structure (la vitesse de Darcy) est moins importante que la vitesse de Saint-Venant, ce qui correspond aux mesures de terrain.

Le mouvement entré et sorti du fluide dans la structure est illustré par la coupe de vitesse

sur la figure ci-dessous :

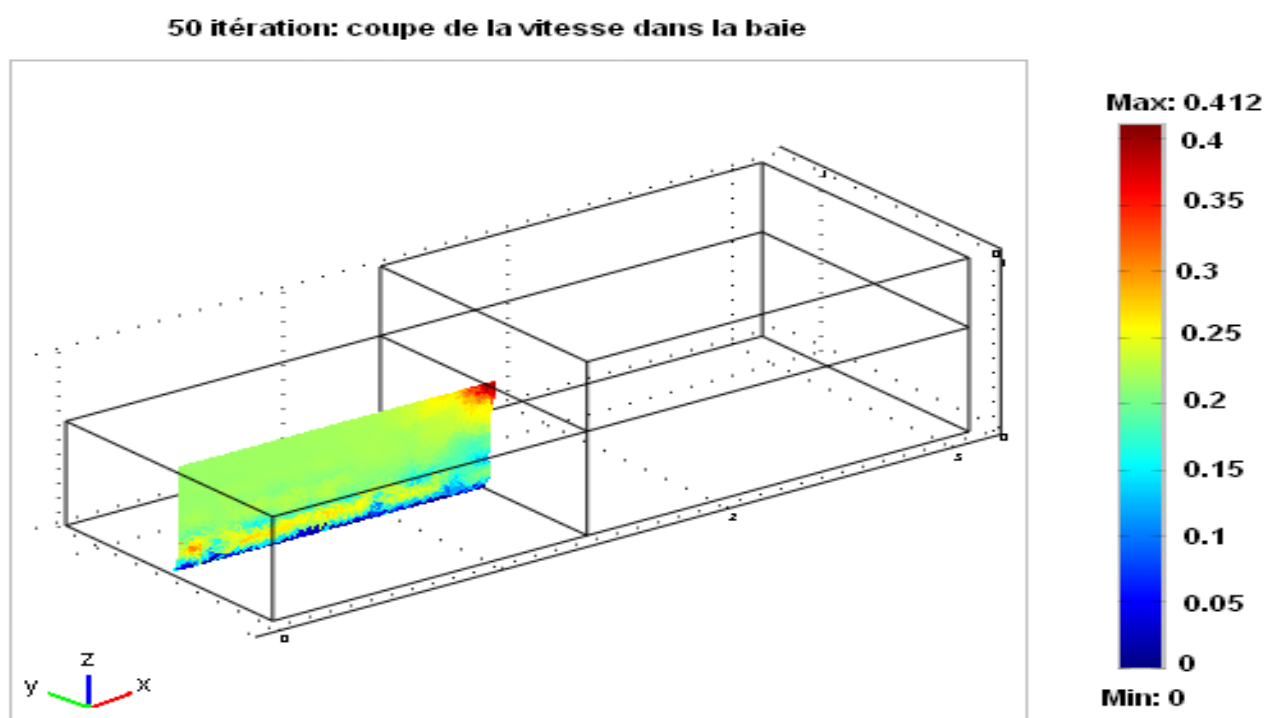


FIG. 5.7: Coupe de la vitesse dans la baie

Cette coupe de la vitesse montre que l'impact de la vitesse issue de la baie est beaucoup plus important au niveau supérieure de la dune en contact avec le fluide. Ce qui induit une chute progressive de la partie supérieure de la portion de la dune et explique donc son recule.

Voici la coupe de pression et les flèches du champ des vitesses de l'écoulement au cours des 50 premières itérations.

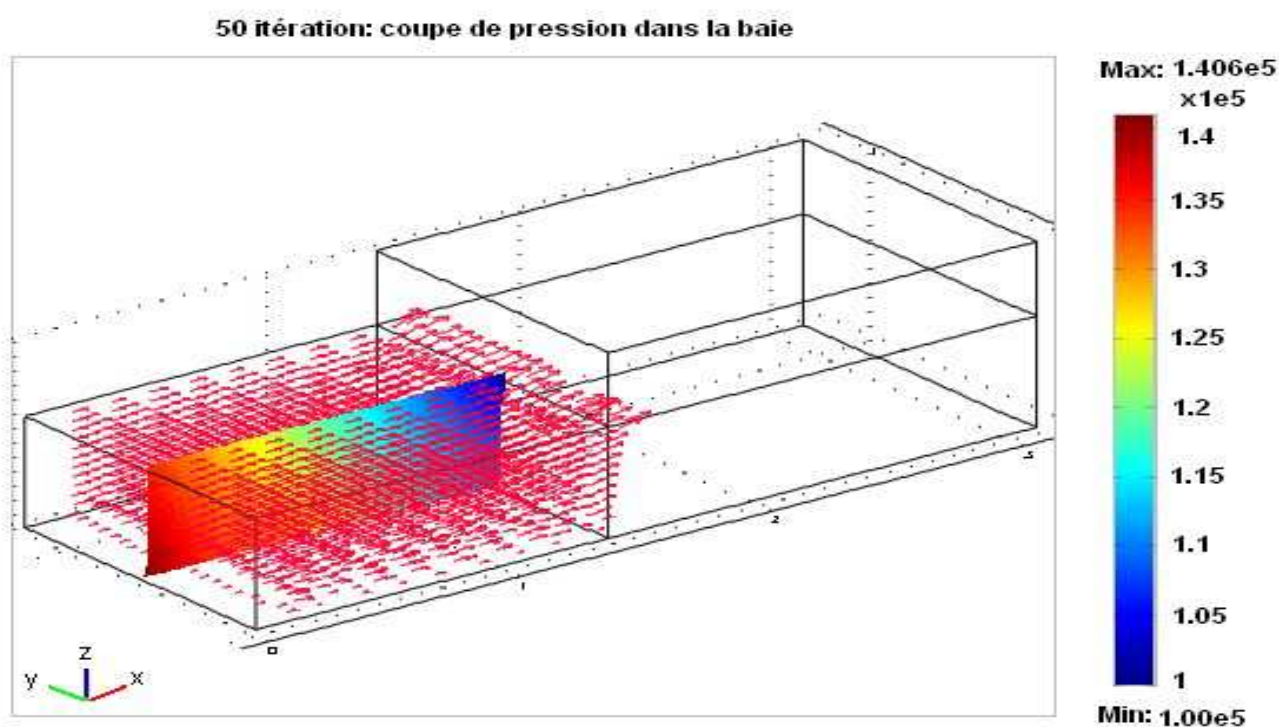


FIG. 5.8: Coupe de la pression dans la baie

Cette simulation montre que lors d'un flux la pression est plus importante à l'amont et que lors d'un reflux, elle est plus importante à la sortie de la structure. C'est ce flux et reflux de l'eau dans la structure qui entraîne progressivement l'érosion de la portion de la dune et sera mis en évidence dans différentes manières dans les simulations qui suivent.

Les flèches représentent ici le profil du champ de vitesse de Darcy, c'est la vitesse du fluide dans la structure. La partie en contact direct avec le fluide est plus chargée. Par le mouvement du flux et du reflux deux phénomènes se créent :

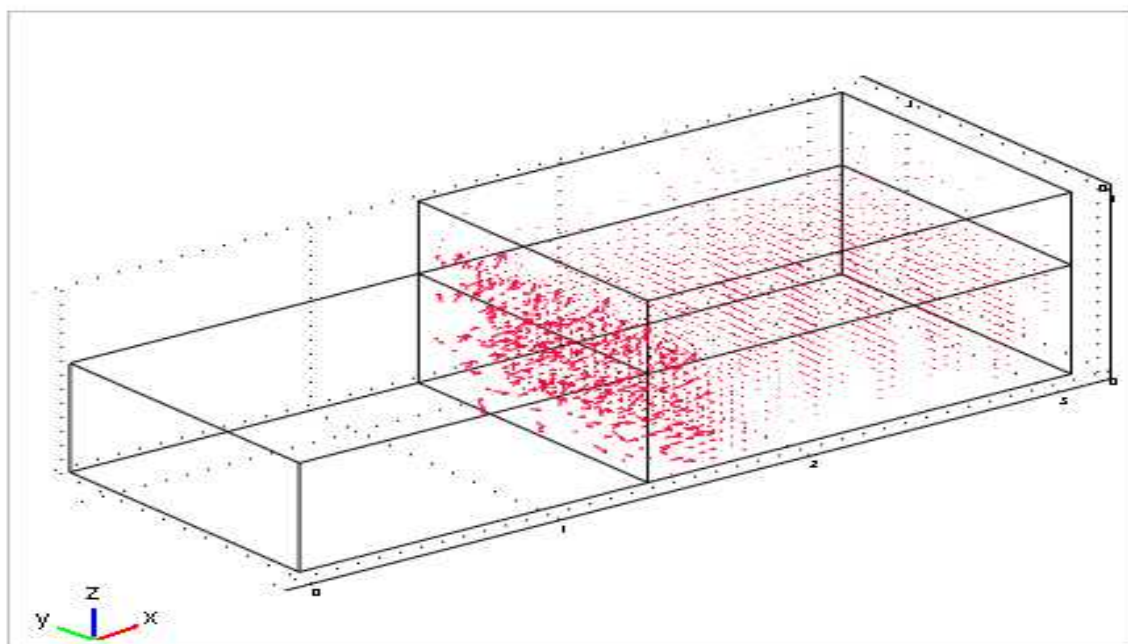
**100 itération: profile du champ de vitesse dans le milieu poreux**

FIG. 5.9: Flèches dans la structure : champ de vitesses de Darcy

- l'érosion progressive entraînant la chute de la partie supérieure de la dune ;
- le transport de particules érodées dans la mer ou au loin dans le fleuve par l'écoulement.

Comme le montre la simulation ci-après sur une portion de la dune au bout de la 100<sup>ème</sup> itération le coupe de vitesse de Darcy met évidence un léger recul de la dune.



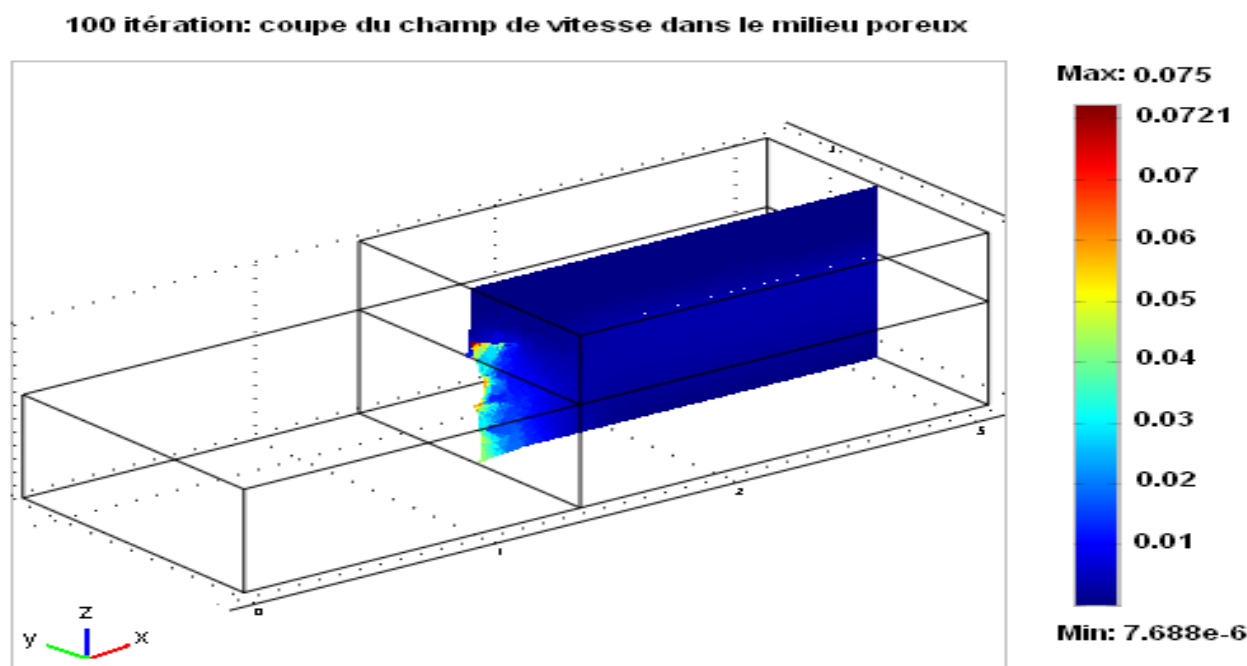


FIG. 5.10: Coupe champ de vitesses de Darcy

Pour mettre en évidence le recul de la dune toujours au niveau local, la simulation est donnée ci-après dans le plan  $[xz]$ . Cette coupe met en exergue le phénomène d'érosion interne dû à la surpression du fluide dans le milieu poreux :

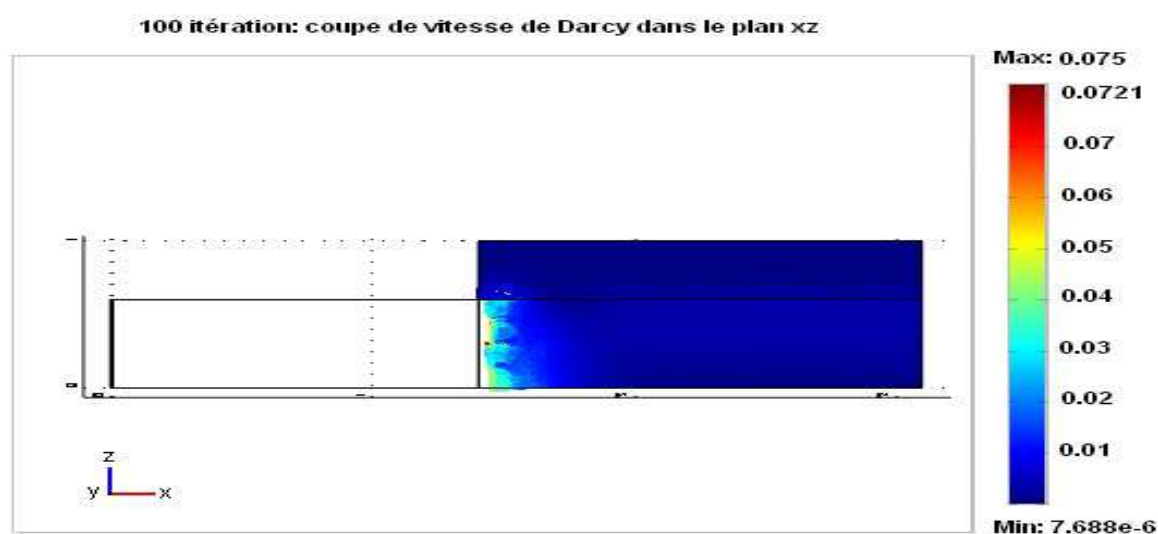


FIG. 5.11: Coupe champ de vitesse de DARCY dans le plan  $[xz]$

On remarque l'érosion de la dune au droit de l'écoulement en quelques itérations qui entraînera l'effondrement de la partie supérieure. C'est un processus continu. Le champ de pression confirme les simulations sur le champ des vitesses. En effet, le flux et le reflux crée successivement des surpressions et des dépressions qui seront à l'origine de la chute des bancs de sable. La matière arrachée sera transférée et entraînée dans l'écoulement.

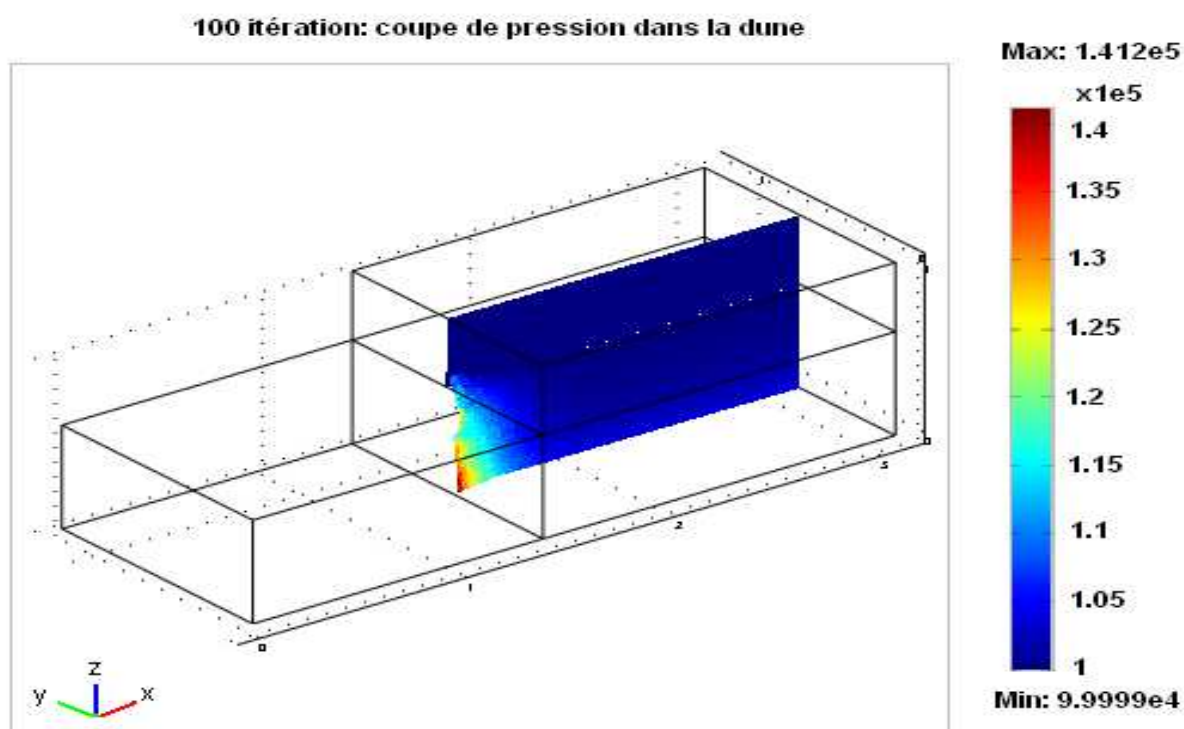


FIG. 5.12: Coupe de pression dans la structure

L'alternance des effets de surpression et de dépression est d'autant plus remarquable qu'elle se matérialise fortement dans la simulation du déplacement. L'analyse du champ de pression nous donne en réalité une information qualitative. En effet, seul le frottement peut caractériser l'arrachement de la matière (l'érosion des particules).

Après avoir déterminé la vitesse et la pression dans le milieu poreux, nous avons voulu montrer l'évolution du profil local de la dune. Pour se faire, la coupe de déplacement constitue un argument valable. Les simulations ci-dessous donnent une estimation sur l'érosion de la portion de la dune considérée.

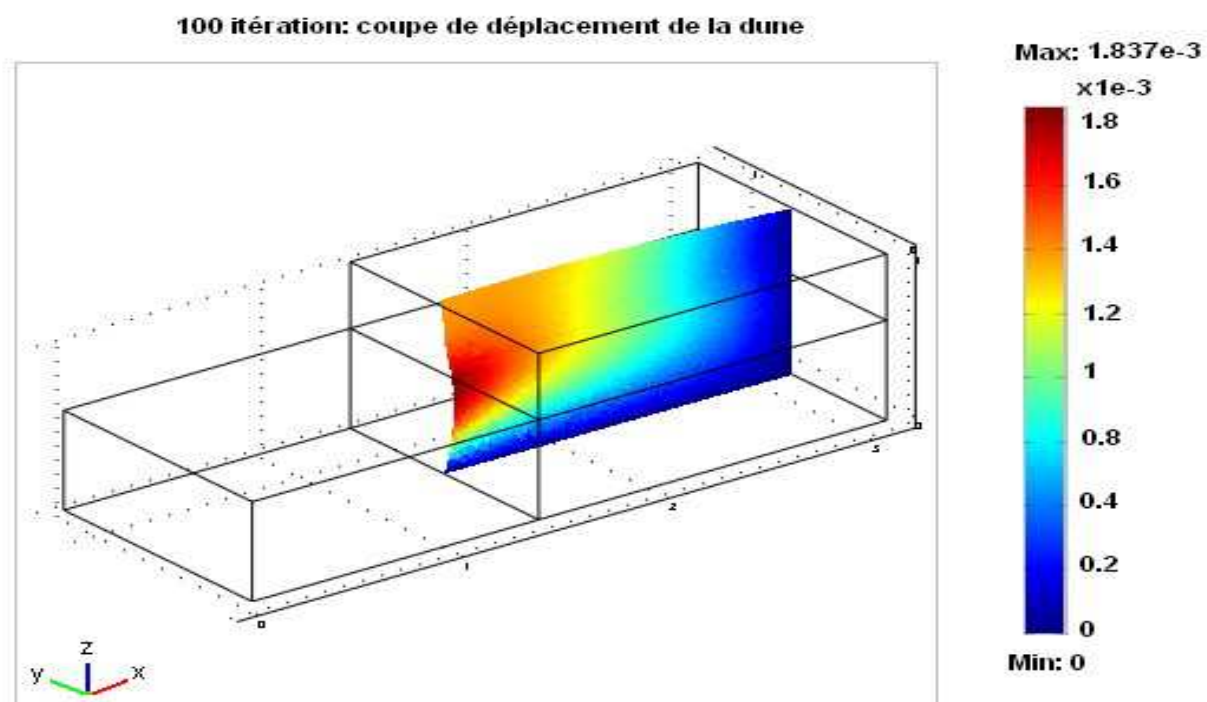


FIG. 5.13: Coupe déplacement d'un échantillon de la Langue de Barbarie

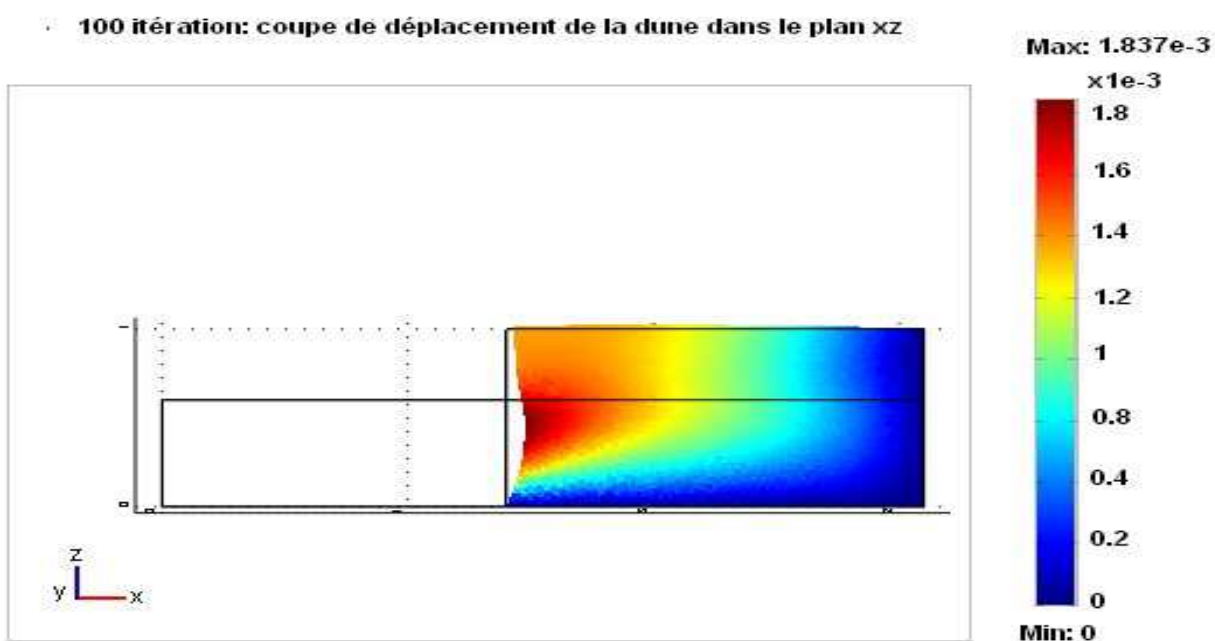


FIG. 5.14: Coupe déplacement du domaine microscopique dans le plan  $[xz]$

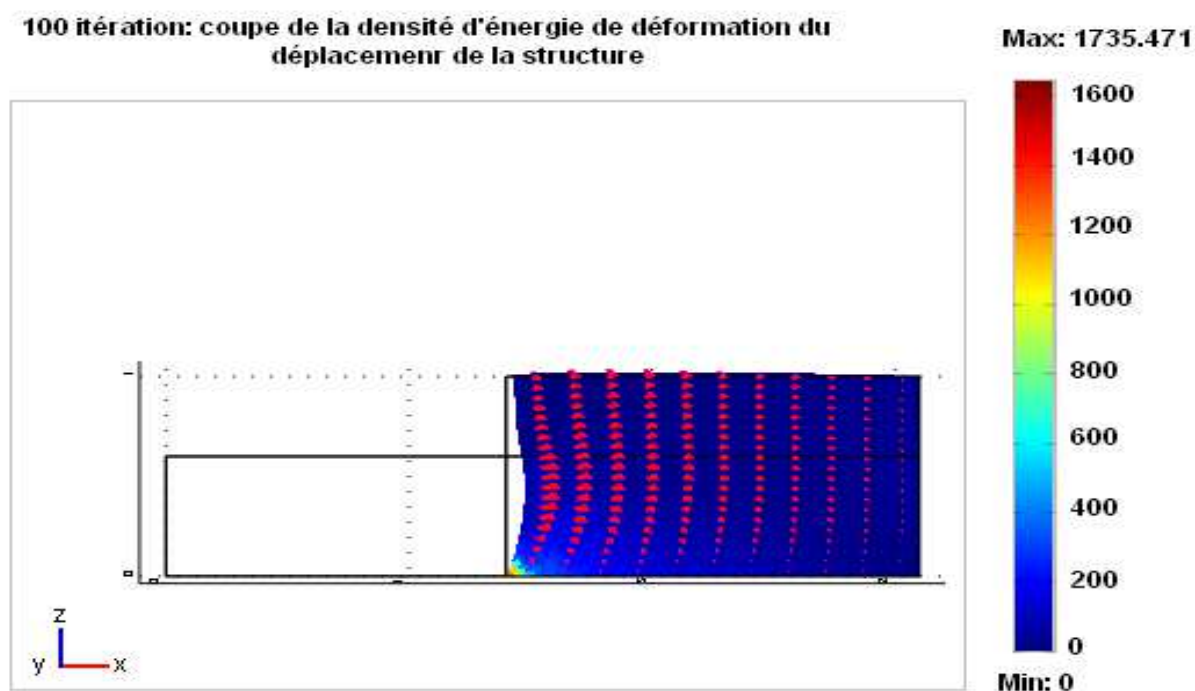
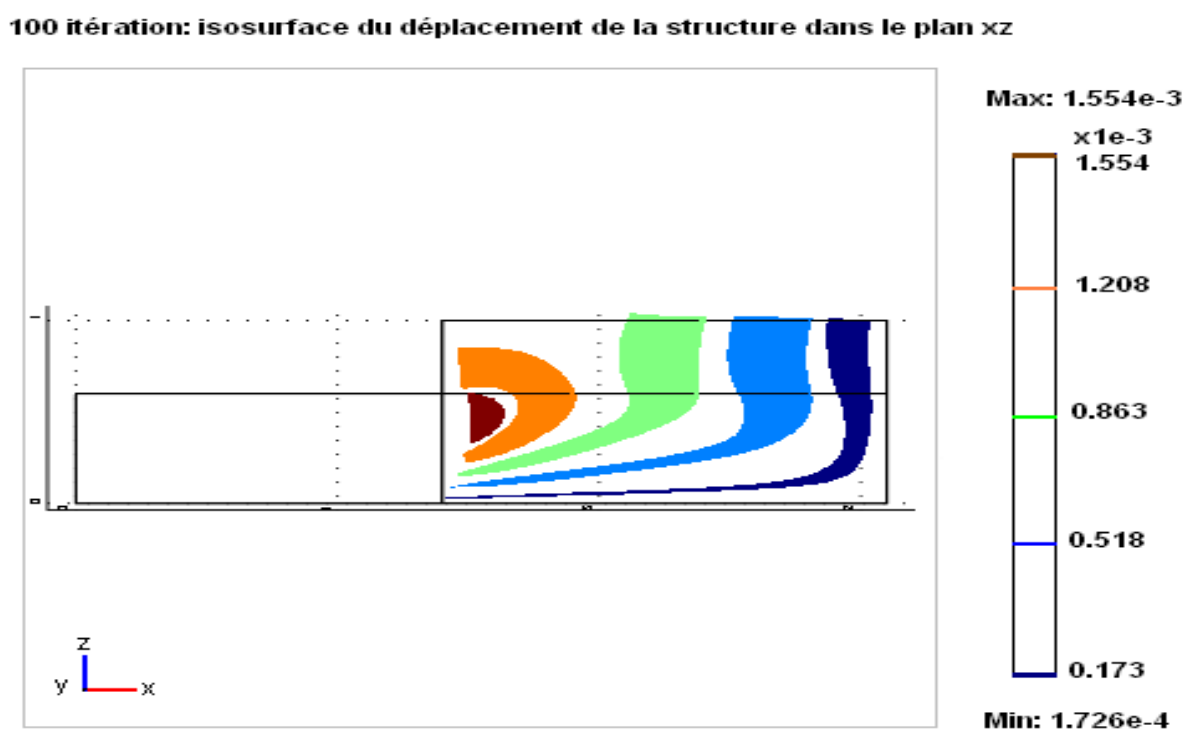


FIG. 5.15: Coupe densité d'énergie de déformation

FIG. 5.16: Iso surface dans la structure dans le plan  $xz$

Après avoir montré la vitesse du fluide dans la structure et celle de la pression, le profil intermédiaire de la portion de la dune est illustré par la simulation ci-après :

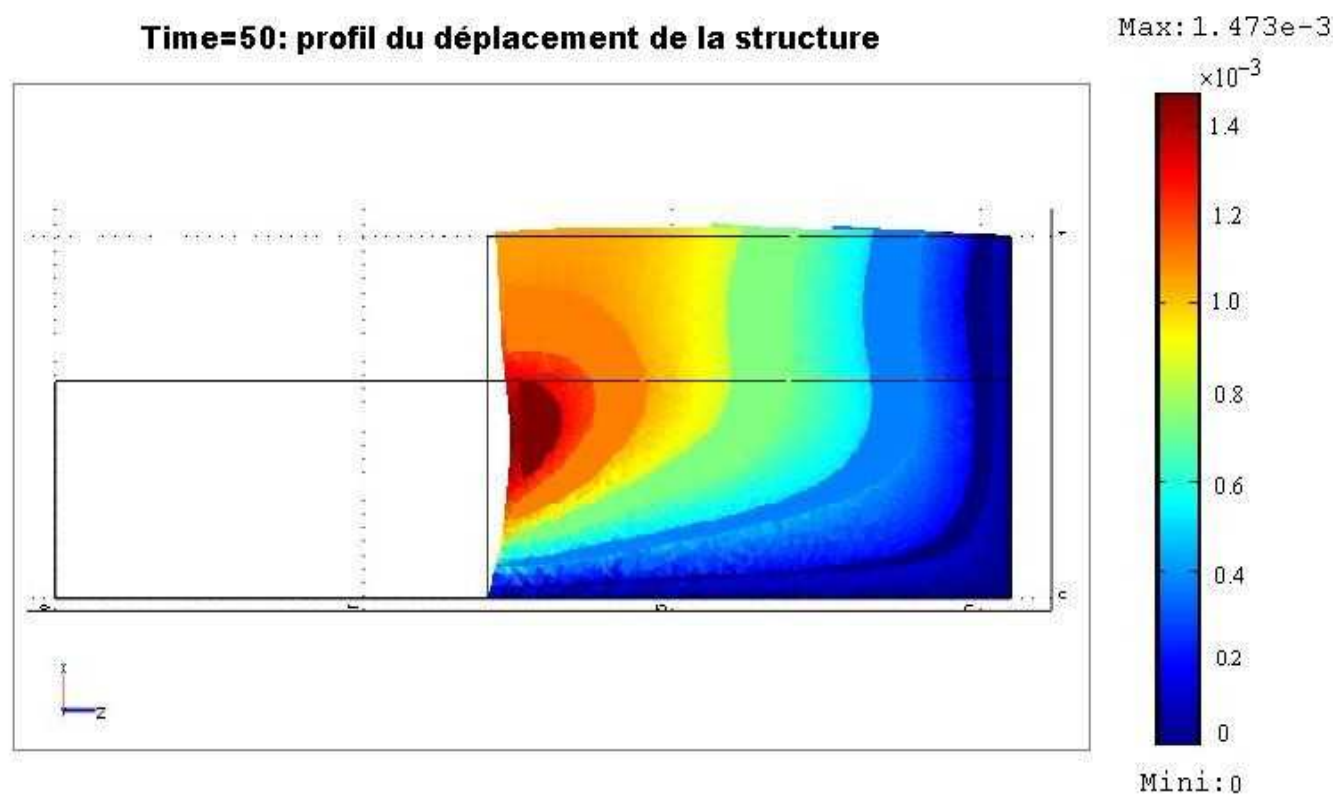


FIG. 5.17: Iso surface dans la structure dans le plan  $[xz)$

Pour estimer la quantité de sable arrachée à cet instant, on calcule la surface du trapèze située au devant de la structure illustré par le schéma ci-dessous :



FIG. 5.18: Iso surface dans la structure dans le plan  $[xz)$

qui correspond au déplacement de la structure visible dans la figure et on le multiplie par la largeur

### 5.2.4 Retour à l'échelle macroscopique

On considère l'érosion d'une interface fluide/structure provoquée par un écoulement perpendiculaire à cette interface. Le fluide porteur est l'eau. Le matériau érodé est du sable. Le fluide en écoulement et le sol sont délimités par une interface notée  $\Gamma$ . D'un côté de  $\Gamma$ , le mélange eau+particules se comporte comme un fluide dilué en écoulement. De l'autre côté de  $\Gamma$ , ce mélange se compose comme un milieu poreux saturé. Lors d'une érosion une fraction de mélange se trouvant du côté du milieu poreux va traverser l'interface pour être dans le fluide. La vitesse d'écoulement de référence est  $U_0 = \frac{q_0}{\kappa \cdot L^2}$ ,  $q_0$  est le débit initial. Le temps caractéristique d'écoulement est  $t_0 = \frac{L^2}{U_0}$ . Cette échelle s'intéresse au déplacement du trait de côte qui est dû aux différences spatiales et temporelles dans le transport longitudinal de sédiment et aux conditions aux bords de la zone étudiée.

#### 5.2.4.1 Le passage du micro au macro

En pratique, la simulation permettant de préciser l'élargissement de la brèche de la LB comprends deux étapes :

- un premier calcul permet d'obtenir les caractéristiques de la crue au droit de la dune, c'est l'étude locale ou microscopique ; Cette étude microscopique sera effectuée tout au long des 500 mètres de largeur de la Langue de Barbarie. Après avoir obtenu, les champs de vitesse et de pression autour de la Langue de Barbarie un maillage est alors utilisé pour calculer à chaque pas de temps les différentes positions  $x_i$  des cellules et les quantités  $Q_i$  transportées.

- ensuite, un deuxième calcul permettant de déterminer l'évolution de la dune est mené en s'appuyant sur les résultats de l'étape précédente, c'est l'étude macroscopique ; elle consiste à effectuer l'assemblage de tous les microdomaines de l'étape précédente pour donner un profil global de la Langue de Barbarie. L'assemblage de l'ensemble des microstructures de la section-5.3 requiert des moyens informatiques plus consistants. En effet, outre des difficultés d'implémentation, cette technique est sujette à un coût de calcul relativement important. Une simulation à long terme pourra montrer le mécanisme et le recul fulgurant à l'échelle de la Langue de Barbarie (calculer l'évolution spatiale et temporelle) d'une part, et estimer la largeur du conduit, et du débit d'écoulement au travers la brèche. Pour une question de temps et de matériel ce volet du

travail n'est pas abordé dans cette thèse, c'est l'un de nos sujets en perspective, c'est-à-dire un de nos axes de travail après cette thèse.

### Remarque

Dans cette approche à double échelle, l'étape microscopique est basée sur la résolution simultanée des équations de Saint-Venant, de Darcy et de contraintes de déformation. L'évolution globale du milieu est assurée par la loi de conservation ci-dessus (5.2.2 modèle d'évolution de la structure). La simulation explicite de la phase de déplacement local, montre que les frontières sont mobiles, soumises aux contraintes physiques. En outre, elle montre que le modèle donne les ordres de grandeurs de l'évolution de l'érosion

## 5.3 Conclusion

Cette partie met en exergue l'effet de l'écoulement sur la dune et de la dune sur l'écoulement. Nous avons développé un modèle micro destiné à faciliter l'établissement de loi constitutive macroscopique pertinente afin de mieux comprendre et décrire plus précisément les phénomènes prenant place dans l'écoulement en milieux poreux. A cette fin nous avons fait un couplage fluide-structure dans la modélisation et la simulation de l'étude de l'évolution de la dune dans le temps.

En même temps, cette partie nous mettons clairement en évidence la nécessité de séparer les deux échelles dans l'étude de l'élargissement de la brèche. Toute approche unique et globale serait insuffisante et ne saurait l'expliquer. Certains renseignements disponibles sur certains paramètres ne peuvent et ne doivent être considérés que comme des paramètres locaux pour une meilleure implémentation.

Si la séparation des échelles apparaît convenable, il est par contre nécessaire de développer substantiellement des méthodes d'assemblages en vue de passer à des dimensions plus grandes.

## Conclusions et perspectives

Au cours de cette thèse, nous avons proposé un nouveau schéma numérique de résolution de problèmes d'écoulement en milieu peu profond, basé sur une méthode d'éléments finis mixte. Nous avons détaillé l'analyse mathématique de la méthode et présenté sa mise en œuvre numérique et nous avons illustré sur des exemples simples les propriétés essentielles de la méthode. Un des points clé de cette thèse réside dans l'introduction d'une équation indépendante de conservation adaptée pour déterminer la hauteur du fluide à chaque point de l'écoulement. Nous avons vu que le schéma possédait la propriété de récupérer la hauteur qui n'est pas prise en compte dans les équations de Saint-Venant. Cette nouvelle approche étudiée ici, le couplage  $2D1/2$  permet de récupérer la troisième composante de la vitesse dans les équations de Saint-Venant. Une nouvelle méthode beaucoup plus avantageuse que celle de  $2D$  et en même temps moins lourde que celle de  $3D$ .

Par ailleurs, en général, on utilise un seul type d'éléments finis, dans cette thèse, nous avons présenté un moyen de prendre en compte la méthode d'éléments finis mixte. Le schéma nous a permis d'étudier l'écoulement dans le domaine avec plusieurs configurations, en tenant compte de la présence d'un obstacle mais aussi de l'écoulement sans obstacle. Les variations de la hauteur d'eau dans les différents cas sont discutées. Nous avons montré que les résultats obtenus sont en bonne concordance avec nos attentes. Nous avons une différence avec la solution expérimentale de l'ordre prévu, mais en temps de calcul bien plus faible.

Cette étude est très importante dans le cas de rupture de barrage, de digue ou de crues subites. Le phénomène de propagation d'une crue peut être assimilé à la translation d'une onde qui se déforme au cours de cette translation, en fonction du frottement et du stockage dans le cours d'eau. En effet, on observe dans chacun des cas étudiés, que cette onde, tout en conservant son volume, présente globalement une certaine réduction du débit de pointe, et met un certain temps pour parcourir le bief. Il y a donc atténuation de la pointe de crue, qui se propage avec une certaine vitesse de translation, donnant donc un temps de transfert pour parcourir le bief.



Un autre point important abordé dans cette thèse est celui du développement multi échelles (l'échelle microscopique et l'échelle macroscopique) dans l'étude de l'élargissement de la brèche. Dans cette partie nous avons réalisé un nouveau couplage fluide-structure avec des conditions de couplages appropriées. Des simulations à l'échelle microscopique ont été réalisées pour mettre en évidence l'effet de la vitesse et de la pression dans la structure et de montrer le profil du domaine à un temps  $t$  donné. Pour cela, nous avons développé un algorithme pour mettre en évidence les petits déplacements de la structure au niveau de l'interface. Cet algorithme détermine à chaque pas de temps la position de l'interface de manière explicite à partir des déplacements de la structure tandis que la vitesse et la pression du fluide sont calculées à partir couplage  $2D1/2$  de façon implicite. L'assemblage des micro domaines est un vaste sentier en perspective qui demande des moyens informatiques plus développés, autrement dit, c'est un travail qui requiert des ressources informatiques conséquentes.

Par ailleurs, les schémas développés se sont révélés concluants et mériteraient d'être étendus dans le domaine global. Il conviendrait en outre d'approfondir ces essais pour pouvoir utiliser les avantages du calcul parallèle notamment. Dans la perspective de tenir en compte des phénomènes de marée et de la force de Coriolis, on est amené à faire l'assemblage de l'ensemble des micro domaines pour une estimation globale du recul de la dune.

## Annexe A

### Simulation par DJAMA d'une crue

#### A.1 Cas d'un domaine sans obstacle

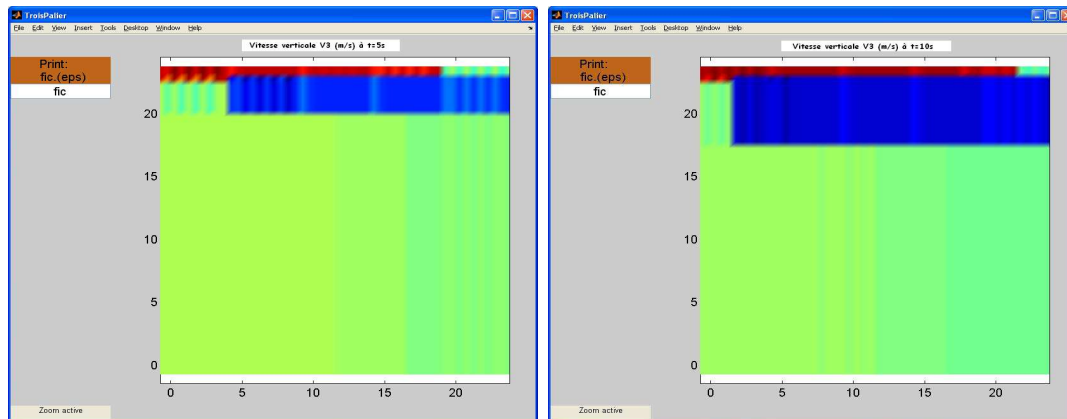


FIG. A.1: Simulation d'une crue sans obstacle à  $t = 5s$  et  $t = 10s$

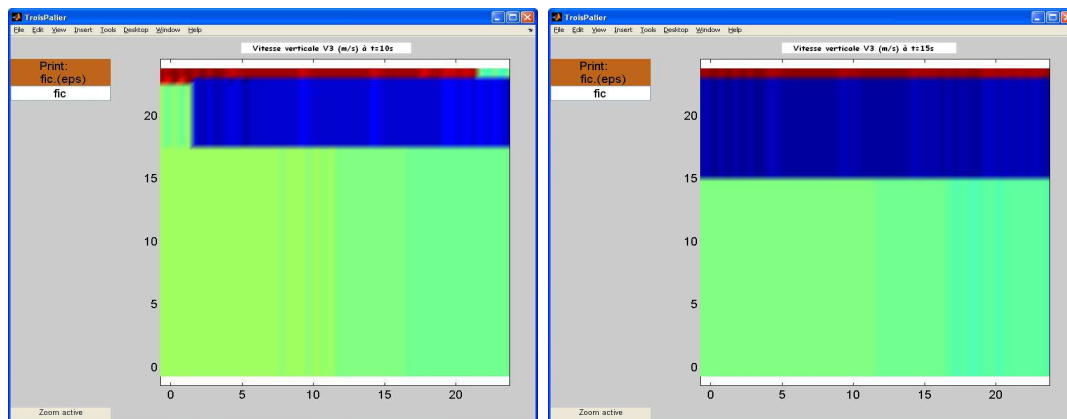
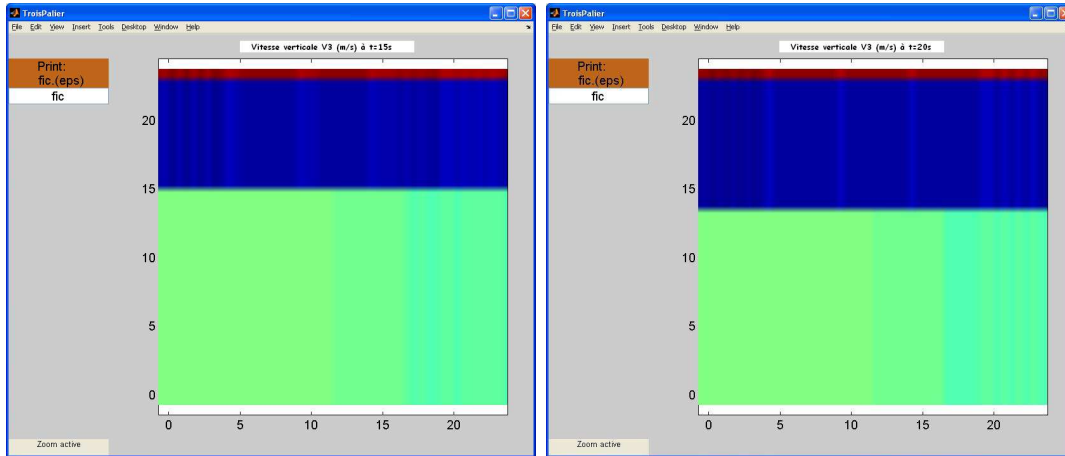
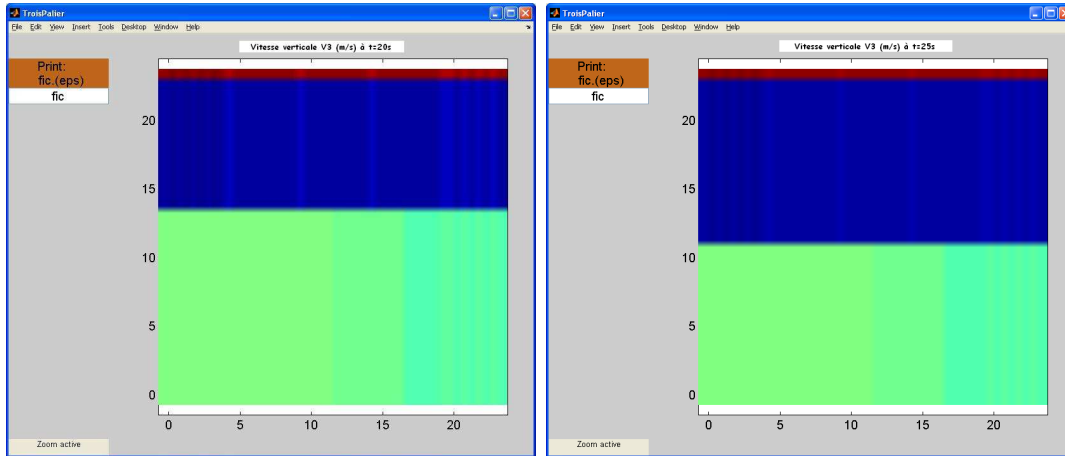
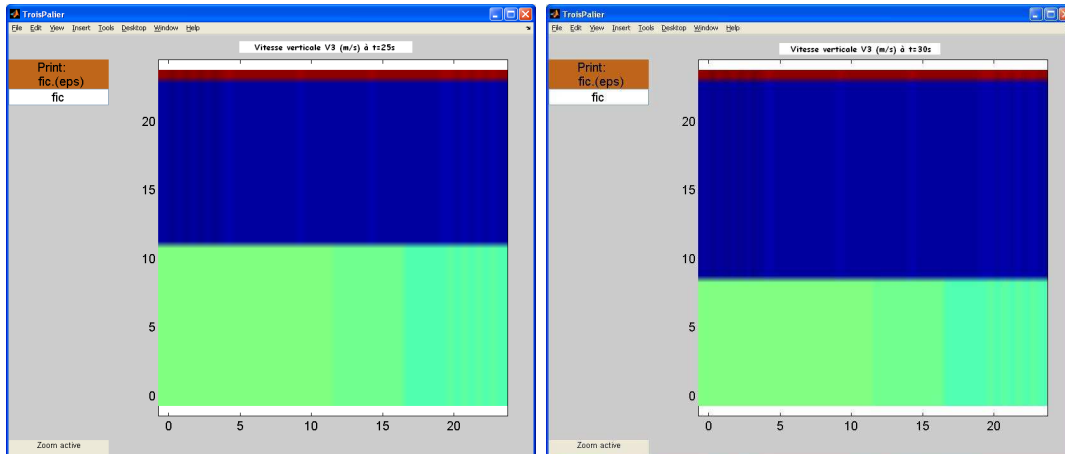
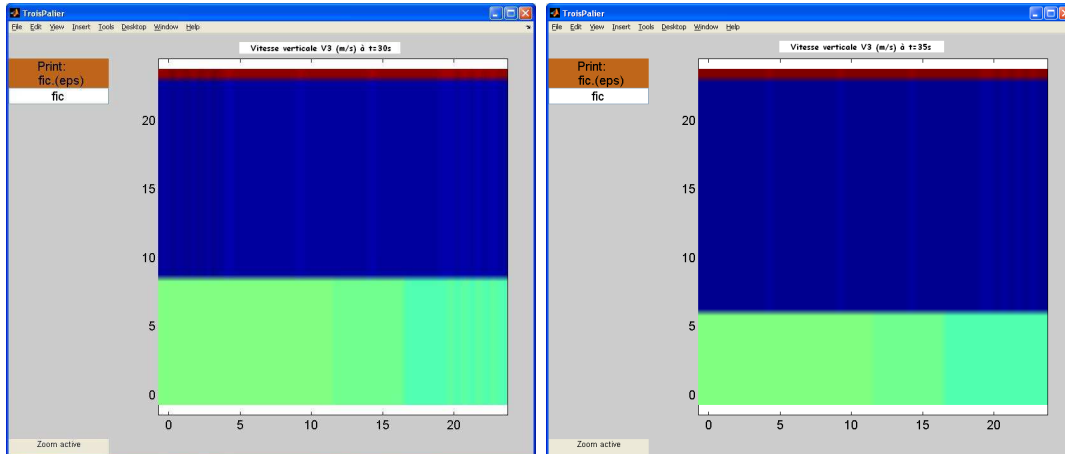
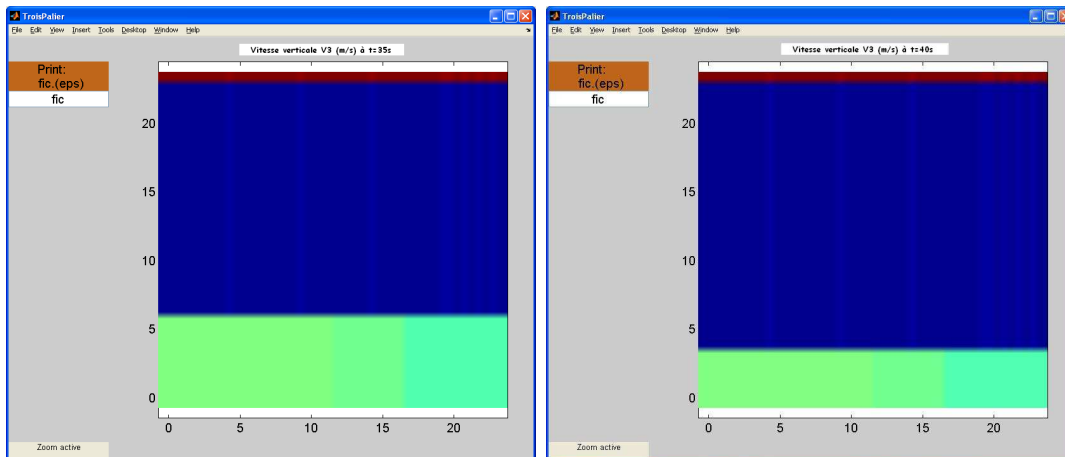
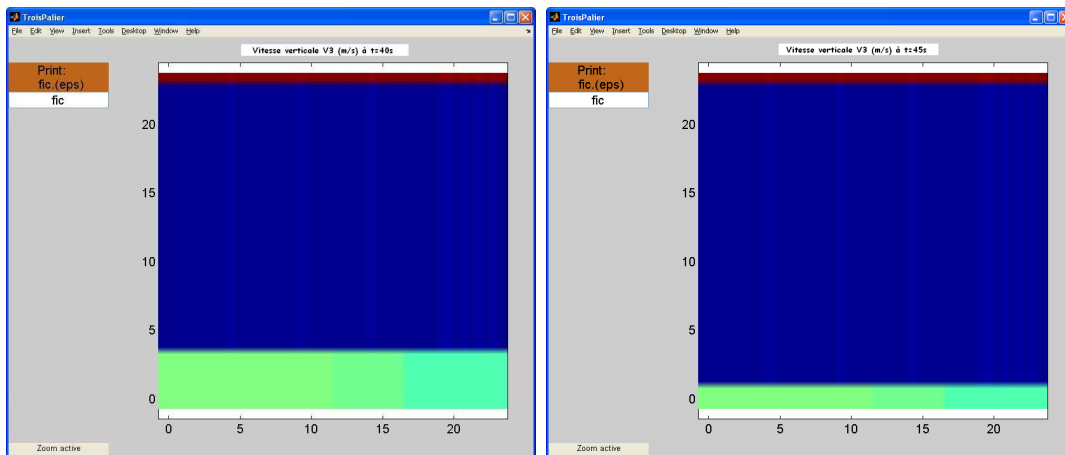


FIG. A.2: Simulation d'une crue sans obstacle à  $t = 10s$  et  $t = 15s$

FIG. A.3: Simulation d'une crue sans obstacle à  $t = 15s$  et  $t = 20s$ FIG. A.4: Simulation d'une crue sans obstacle à  $t = 20s$  et  $t = 25s$ FIG. A.5: Simulation d'une crue sans obstacle à  $t = 25s$  et  $t = 30s$

FIG. A.6: Simulation d'une crue sans obstacle à  $t = 30s$  et  $t = 35s$ FIG. A.7: Simulation d'une crue sans obstacle à  $t = 35s$  et  $t = 40s$ FIG. A.8: Simulation d'une crue sans obstacle à  $t = 40s$  et  $t = 45s$

## A.2 Cas d'un domaine avec obstacle

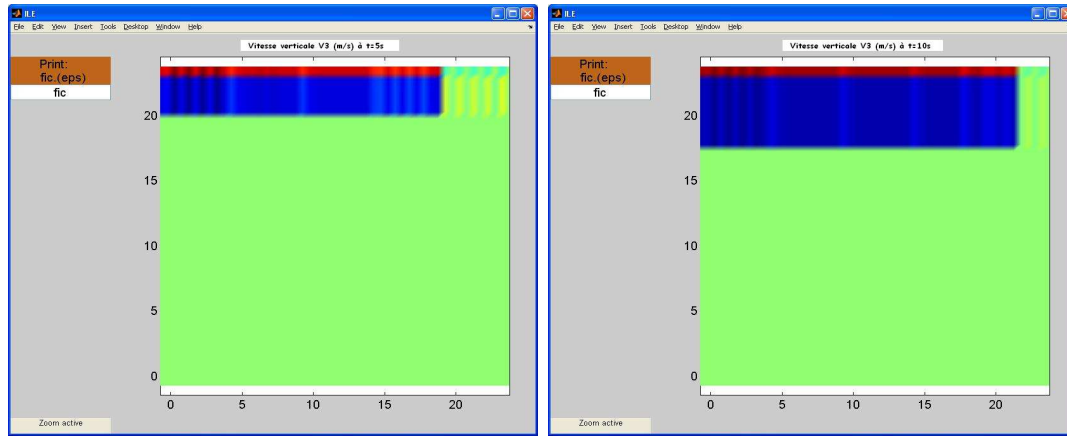


FIG. A.9: Simulation d'une crue sans obstacle à  $t = 5s$  et  $t = 10s$

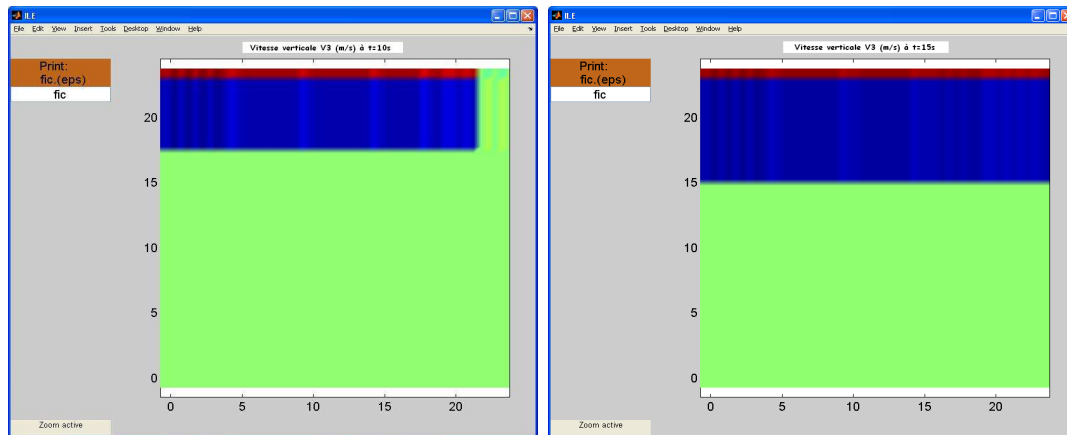


FIG. A.10: Simulation d'une crue sans obstacle à  $t = 10s$  et  $t = 15s$

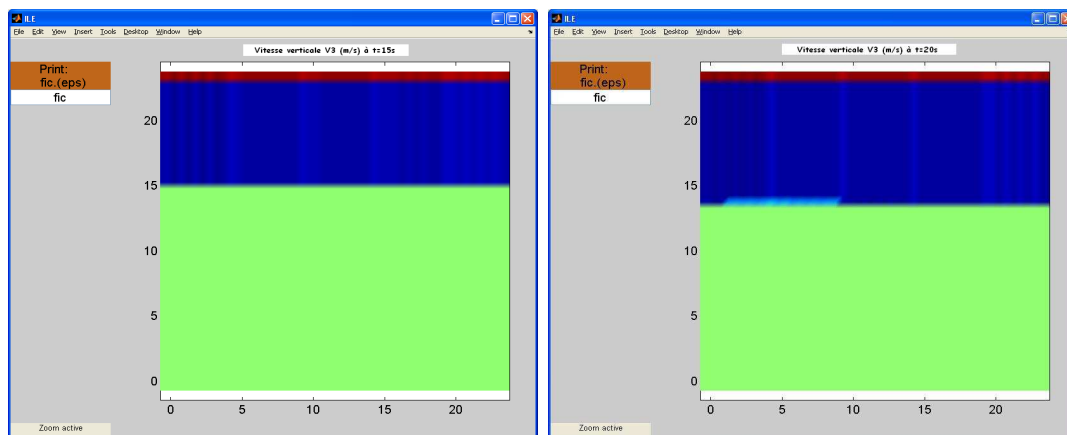
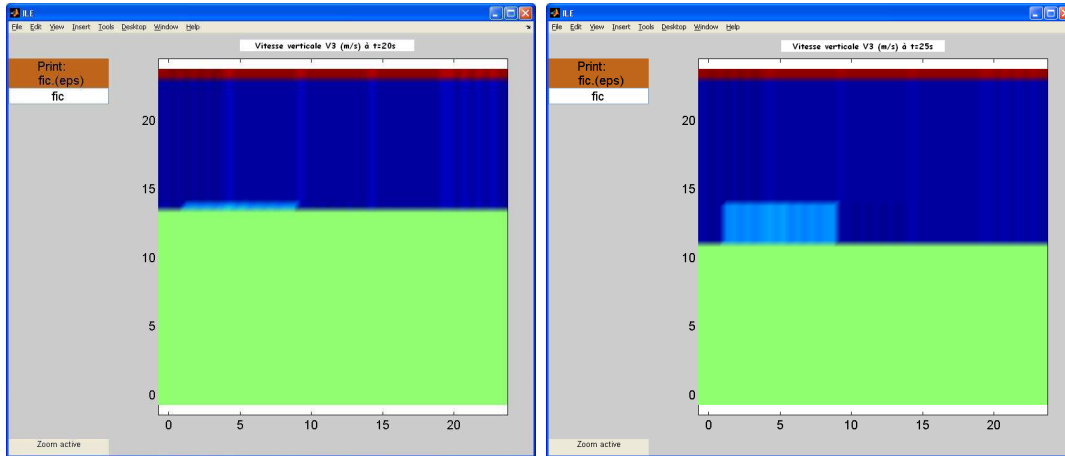
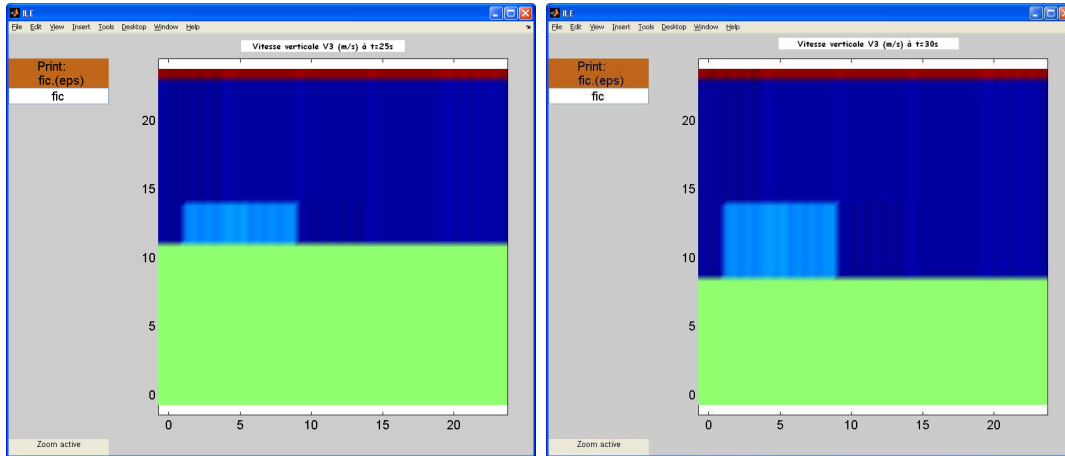
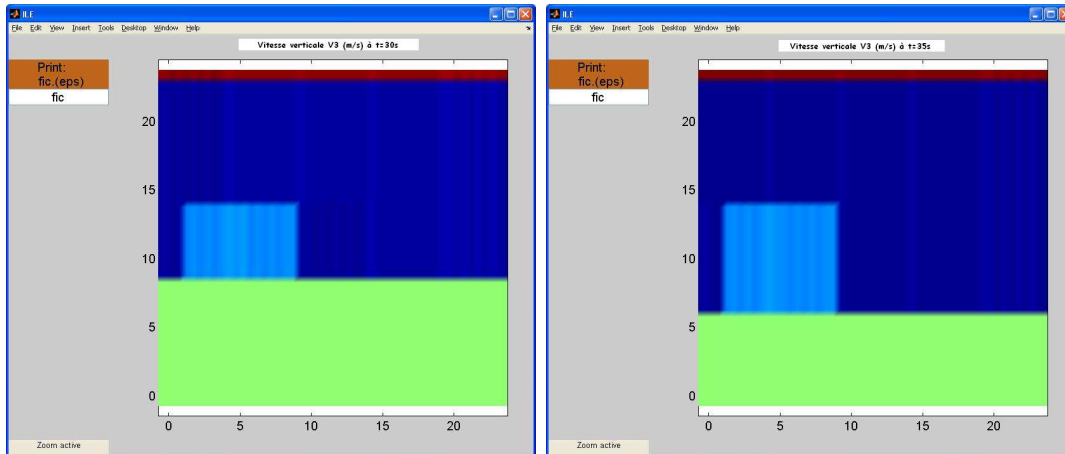
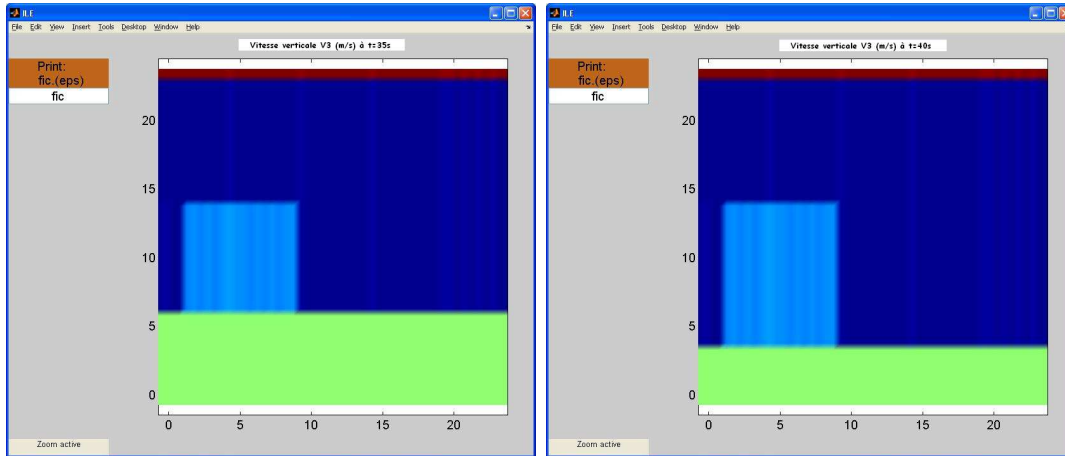
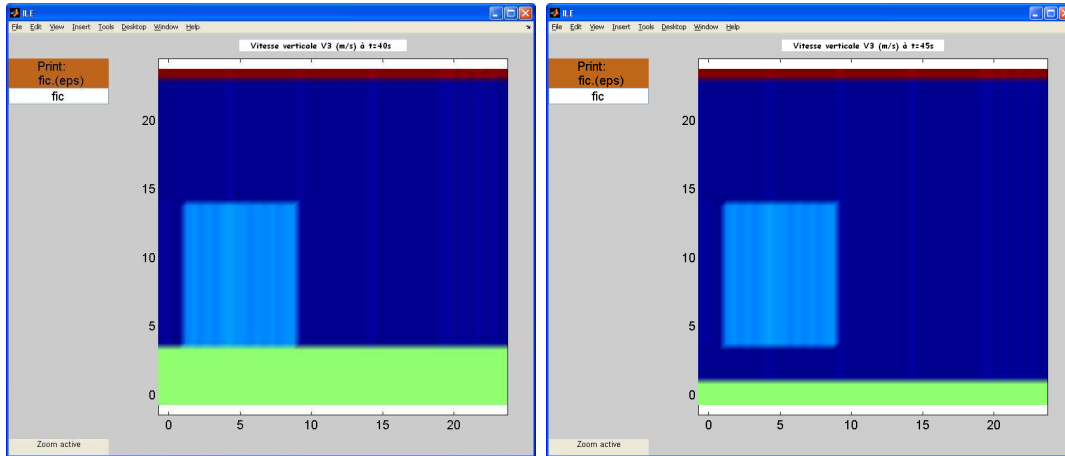
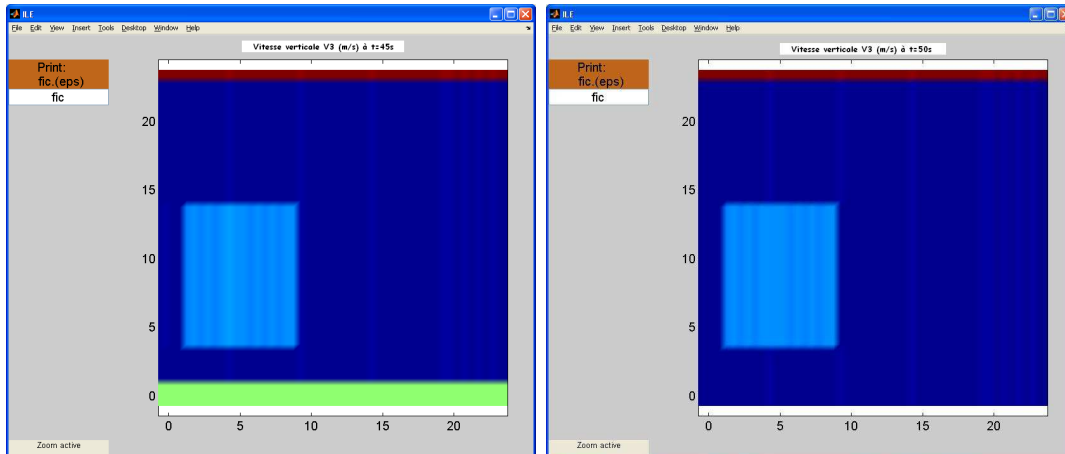


FIG. A.11: Simulation d'une crue sans obstacle à  $t = 15s$  et  $t = 20s$

FIG. A.12: Simulation d'une crue sans obstacle à  $t = 20s$  et  $t = 25s$ FIG. A.13: Simulation d'une crue sans obstacle à  $t = 25s$  et  $t = 30s$ FIG. A.14: Simulation d'une crue sans obstacle à  $t = 30s$  et  $t = 35s$

FIG. A.15: Simulation d'une crue sans obstacle à  $t = 35s$  et  $t = 40s$ FIG. A.16: Simulation d'une crue sans obstacle à  $t = 40s$  et  $t = 45s$ FIG. A.17: Simulation d'une crue sans obstacle à  $t = 40s$  et  $t = 45s$

## Annexe B

### Suivi chronologique de la brèche

Nous nous baserons sur les données que nous avons recueillies auprès de M. Ibrahima DIATTA (doctorant à l'UGB) et de M. Ibrahima DIOP (Chef de la Division régionale de l'Hydraulique).

#### B.1 Le premier jour



FIG. B.1: Quelques minutes après l'ouverture de la brèche.

Dans la nuit du vendredi 3 au samedi 4 octobre 2003, la brèche était longue de  $100m$ , large de  $4m$  et sa profondeur était de  $1,5m$ . Le lendemain à 8 heures du matin sur la figure 7, on voit l'eau du fleuve de couleur ocre, à fort courant, qui affouille les rives. C'est la violence de ce courant qui a provoqué le recul à grande vitesse des berges de la brèche. On assistait à des effondrements en bloc des bancs de sable, qui emportaient tout sur leur passage.



## B.2 Deux jours après

Devant la violence du courant, on a observé deux jours après (6 octobre 2003) une largeur de 200m.



FIG. B.2: La brèche deux jours après l'ouverture.

Trois semaines après, le paysage était impressionnant. A la date du 23 octobre, on était à une largeur de 329m et le lendemain 24 octobre à 370m. La profondeur a évolué de 1.5m à 6.20m en marée basse. Entre cette date et le 24 novembre, il y a eu, un ralentissement au niveau du recul des rives. A ce moment, la brèche était large d'environ 400m sur une profondeur maximum de 6.30m.

## B.3 Un mois et demi après



FIG. B.3: La brèche le 24 novembre.

Sur cette photo, on perçoit le changement de la couleur de l'eau. Dans la brèche prédomine désormais l'eau de mer. Cette période coïncide au moment où, le fleuve s'étant vidé, la mer a envahi le chenal principal du fleuve. Le fleuve est alors sujet aux courants de marées, dont les fluctuations sont devenues de plus en plus marquées à Saint-Louis. Cette date a également coïncidé avec le tarissement observé du fleuve au niveau du Pont Faidherbe. La fin du mois de novembre 2003 peut donc être considérée comme un moment de transition : le débit du fleuve s'affaiblit à  $300m^3/s$  et la mer devient de plus en plus houleuse [28].

## B.4 De décembre à avril

A partir de décembre, on assiste au début de la grande érosion des rives de la brèche, à cause de la furie des vagues déjà installée. Jusqu'en avril, la mer érode activement le cordon littoral par le sapement de berges de la flèche et de la brèche.

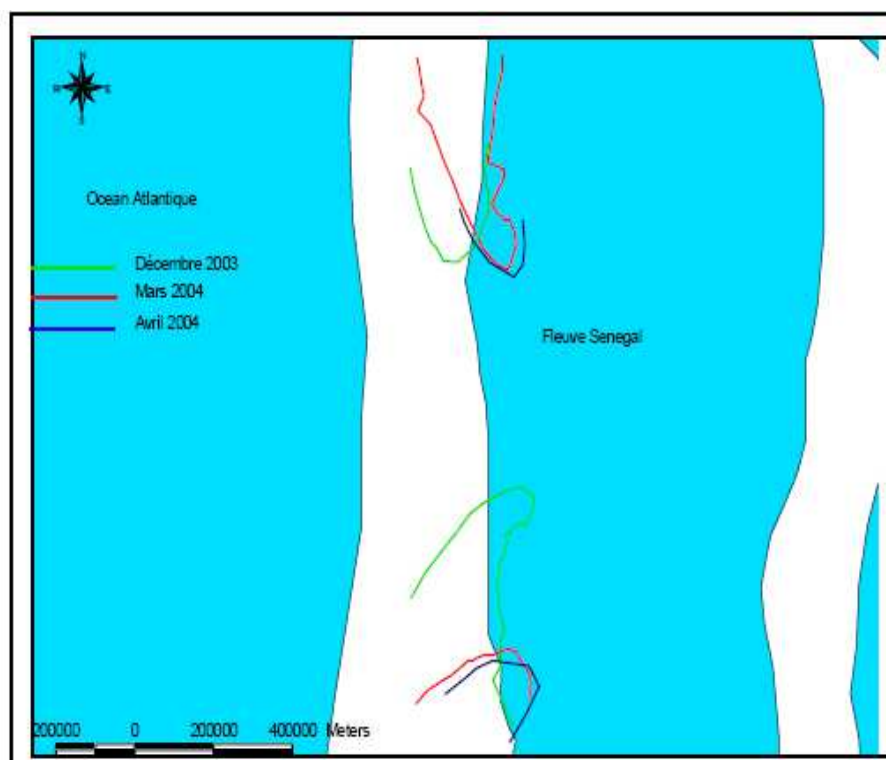


FIG. B.4: La brèche de décembre 2003 à avril 2004.



FIG. B.5: La brèche au mois d'avril 2004.

## B.5 Le comportement de la brèche en avril et mai 2004

Quelques sorties sur le terrain (le 12 avril, le 30 avril et le 27 mai 2004) avec des spécialistes M. Boubou A. SY, Ibrahima DIOP et Sidy FALL ont permis d'évaluer sur place les phénomènes d'érosion, de sédimentation et de migration relative vers le sud. Cette période correspond à une relative stabilisation de la brèche [28].

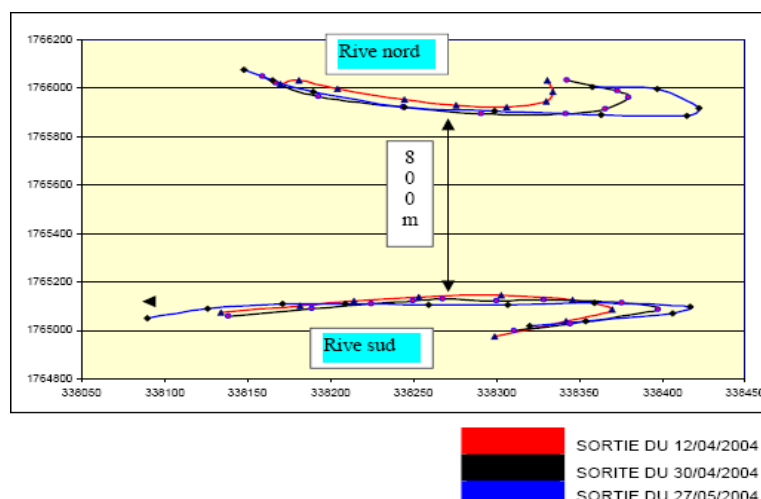


FIG. B.6: Aspect et dynamique de la brèche en avril et mai 2004.

Le mois d'avril correspond au début de l'engraissement de la plage de la Langue de Barbarie. La dérive littorale apporte sur les côtes environ  $600.000$  à  $1.000.000m^3$  de sable. Il se trouve que, dans le cas d'espèce, le dépôt de ces sédiments s'est fait sur les rives de la brèche en fonction des zones à faible courant. Le sapement des rives s'est poursuivi mais avec un jet de rive de moins en moins intense. A chaque sortie, des levées GPS (converties en coordonnées UTM) de la largeur de la brèche en fonction de la section mouillée ont été réalisées. Il est apparu que la position de la rive par rapport au courant déterminait le jeu d'érosion et de sédimentation.

Concernant l'effet du courant sur le comportement de la brèche entre le 12 et le 30 avril 2004, en se référant à la figure 14, on constate que :

- sur la rive nord, il y a eu sédimentation. La rive nord a migré un peu vers le sud de façon inégale : du côté de la mer qui était plus exposé, de  $16m$ , au milieu de la rive nord, de  $30$ , et du côté fleuve, de  $50$  à  $60m$  ;
- sur la rive sud, on observe une érosion de  $5m$  du côté de la mer jusqu'au milieu de la rive. En revanche sur la pointe intérieure de cette rive, on note une sédimentation d'environ  $30m$ . Vers le 27 mai 2004, la tendance était plutôt vers une stabilisation et un ensablement de plus en plus prononcé. C'est ainsi que :
- sur la rive nord, la sédimentation ne s'est faite que du côté fleuve. La languette ainsi formée



FIG. B.7: L'impact du courant marin sur la brèche.

s'accrue de 144m par rapport à la première sortie ;

- sur la rive sud, là aussi on observe une légère sédimentation d'environ 5m. La microfalaise a disparu à la suite du dépôt du sable. On constate aussi que la languette formée du côté fleuve s'est accrue de 36m.

En résumé, on retiendra que, durant toute cette période, la brèche a eu tendance à migrer vers le sud, comme c'était le cas des anciennes ruptures naturelles qui se sont transformées en nouvelles embouchures. La rive nord progressait un peu plus vite que ne reculait la rive sud. Des deux côtés de la brèche se sont formées des languettes à l'image de celle de l'ancienne embouchure avant fermeture, signe de l'activité de la dérive littorale. L'accalmie de la mer, en laissant place au mouvement d'ensablement et d'engraissement de la plage, a permis à la brèche de se stabiliser et même de se réduire. Cela a abouti en septembre à une largeur d'environ 600m. Le 11 juin 2004 déjà, les relevés bathymétriques révèlent des débuts de colmatage du fond de la brèche. Sur la figure 15, le profil de fond se présente en dents de scie : les zones encaissées correspondent aux endroits où le courant marin est encore fort et les plus fortes altitudes correspondent aux zones à faible courant qui s'ensablent et se rehaussent. La largeur de la brèche était estimée aux environs de 800m [28].

La carte bathymétrique de la brèche est plus représentative, car les sondages ont été faits un peu partout sur la brèche. Il apparaît clairement un mouvement de sédimentation, qui explique les faibles profondeurs du côté mer à partir des zones à faible courant (à l'ouest de la carte). Le profil du fond de la brèche le 11 juin 2004



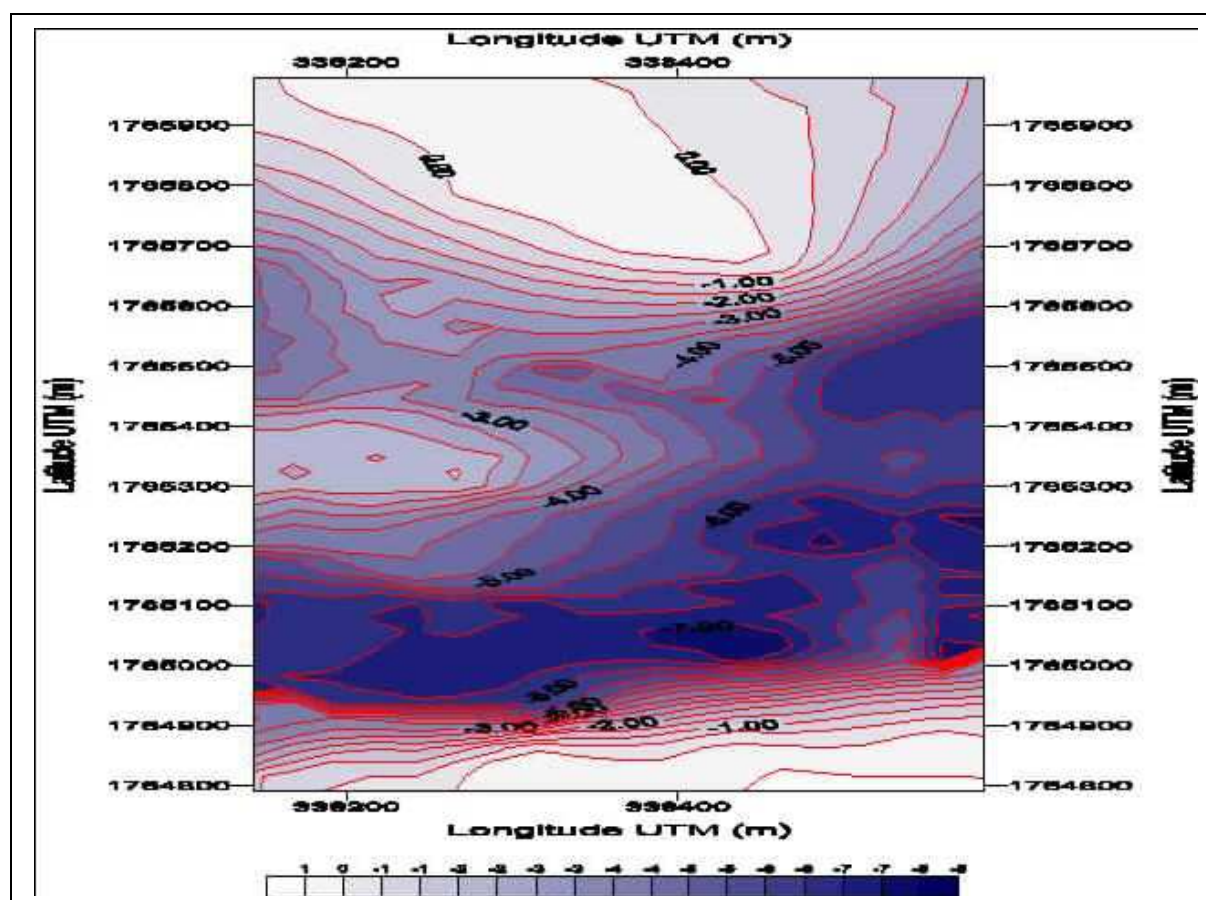


FIG. B.8: Carte bathymétrique de la brèche le 11 juin 2004.



# Bibliographie

- [1] P. Balayn, "Contribution à la modélisation numérique de l'évolution morphologique des cours d'eau aménagés lors des crues.", *Thèse de doctorat. Université CLAUDE BERNARD - LYON 1 (2001)*. 123 pages.
- [2] J. M. Hervouet, "Hydrodynamique des écoulements à surface libre." (*Modélisation numérique avec la méthode des éléments finis*) ; *Ponts et Chaussées (Presses)*, ISBN : 2-85978-379-2, (2003), 312 pages
- [3] I. Danaila, P. Joly, S. M. Kader et M. Postel, "Introduction au calcul scientifique par la pratique." *Université Paris 6. Éditions DUNOD (2005). Collection SCIENCES SUP*, 287 pages
- [4] Rapport sur le réglage du modèle SOGREAH, Modèle mathématique de la vallée du Sénégal, *Université de Grenoble (1970)*. 100 pages
- [5] M. Feistauer "Mathematical methode in fluid dynamics". *Pitman Monographs and Surveys in pure and applied mathematics 67, Longman Scientific & Technocal, Harlow*, 1993, 657 pages
- [6] P.Lascaux, R. Théodor "Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur 1"
- [7] P.Lascaux, R. Théodor "Analyse numérique matricielle appliquée à l'art de l'ingénieur 2"
- [8] E. Audusse, M. O. Bristaux, B. Perthame. "Kinect schemes for Saint-Venant equations with source term on unstructured grid", *Rapport de recherche No 3989 INRIA, juillet 2000*, 44 pages
- [9] A. J. Chorin, "Numerical solution of Navier-Stokes equations", *Report février 1968*, 745-763 pages
- [10] H. Deconinck, R. Struijs, G. Bourgois. "Compact advection schemes on unstructured grids". *Report march 1993*. 73 pages
- [11] J. V. Kan. "A second-order accurate pressure-correction scheme for viscous incompressible flow". *Report july 1986*, 870-890 pages.
- [12] G.-H Cottet and E. Maitre. A level-set formulation of immersed boundary methods for fluid-structure interaction problems. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 338* : pp 581-586, 2004.
- [13] H. Paillere, J-C. Carette, H. Deconinck. "Multidimentional upwind and SUPG methods for the solution of the compressible flow equations on unstructured grids". *report 05 1994 CNRS* 61 pages.
- [14] P. M. Gresho. "On the theory of semi-implicit projection methods for viscous incompressible flow and its implementation via finite element methods that also introduces a nearly consistent mass matrix. Part1 : theory". *Report 1990 Ca 94550, USA*. pp 587-620



- [15] G.-H. Cottet and E. Maitre. A level-set method for fluid-structure interactions with immersed surfaces. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, Vol 16, No. 3 :415-438, 2006.
- [16] P. Hansbo, A. Szepessy. "A velocity-pressure streamline diffusion finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations." *Report september 1989*. 175-192 pages
- [17] C. Schwab. "Remarks on pressure approximation in projection methods for viscous incompressible flow." *Seminar for applied mathematics ETH Zurich, Ch-8092 Zurich, Switzerland. October 1995*. 15-21 pages
- [18] G. Medic, B. Mohammadi. "NSIKE an incompressible Navier-Stokes solver for unstructured mesh", Rapport de recherche No 3644 (1999) 69 pages
- [19] J. Donea, S. Guiliani, and J.P. Halleux. An arbitrary lagrangian eulerian finite element method for transient dynamics fluid structure interaction. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol 33 :689-723, 1982.
- [20] M. Sy, D. Bresch, F. Guillen-Gonzalez, J. Lemoine, and M.A. Rodriguez-Bellido. Local strong solution for the incompressible korteweg model. *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I*, 342 :169-174, 2006.
- [21] G.-H. Cottet, E. Maitre, and T. Milcent. Eulerian formulation and level set models for incompressible fluid-structure interaction. *ESAIM Math. Model. Numer. Anal*, 42 (3) :471-492, 2008.
- [22] H. Deconinck, R. Struijs, G Bourgois and P. L. Roe, "Compact advection schemes on unstructured grids", *In VKI LS 1993-04, Computation Fluid Dynamics, 1993*.
- [23] S. Proust, " Écoulements non-uniformes en lit composé : effets de variations de largeur du lit majeur", *Thèse de mécanique des fluides, École doctorale MEGA, INSA de Lyon Lyon* (2005)
- [24] E. Maitre, T. Milcent, G-H. Cottet, A. Raoult, and Y. Usson. Applications of level set methods in computational biophysics. *Math. Comput. Model.*, à paraître, 2008.
- [25] D. Bousmar and Y. Zech, "Momentum transfer for practical flow computation". *Journal of hydraulic engineering*, 125(7), 696-706 (1999)
- [26] D. Bousmar, N. Wilkin, J. H. Jacquemart, et Y. Zech, " Overbank flow in symmetrically narrowing floodplains." *Journal of hydraulic engineering*, 130(4), 305-312 (2004)
- [27] C.S. Peskin. The immersed boundary method. *Acta Numerica* 2002, Cambridge university Press, (2002) pages 1-39.
- [28] B. C. Yen, "Hydraulics of flood plains : methodology for backwater computation" *Wissenschaftlicher Bericht Nr. 84/5, Institut für Wasserbau/ university Stuttgart* (1984)
- [29] B. C. Yen, R. Camacho, R. Kohane, et B. Westrich, "Significance of flood plains in backwater computation." *Proc. 21st Congress of IAHR*, 3, 439-445 (1985).
- [30] S. Diarra, "Hydrologie des milieux aménagés du delta et de la moyenne vallée du fleuve Sénégal." *Mémoire de maîtrise 2006*, 120 pages.
- [31] D. Maimouna, "Étude de la baisse du niveau de la nappe dans les Niayes du Gandiolais" *Travail d'étude et de recherche 2005*, 130 pages.

- 
- [32] IRD, "Faisabilité de la modélisation pluie débit." *Programme d'optimisation de la gestion des réservoirs (POGR) 2001*, 20 pages.
- [33] A. T. Sarre, "Contribution à l'étude de la dynamique actuelle du Gandiolais (Saint-Louis). " *DEA Chaire UNESCO/UCAD 2004*, 60 pages.
- [34] S. Boubou, "Contribution à l'étude de la dynamique actuelle du Gandiolais (Saint-Louis). " *DEA Chaire UNESCO/UCAD 2004*, 60 pages.
- [35] CETE méditerranée, "Rupture de digues : pratiques actuelles de modélisation des processus de rupture et des conséquence en terme d'inondation", *Cetemf Compiègne- Div OFNI, mars 2005*, 83 pages.
- [36] D. LAIGLE, "Risque d'obstruction des cours d'eau et débâcles brutales ", *Cemagref Unité de recherche Erosion Torrentielle, Neige et Avalanches*, 21 pages.
- [37] J. Renzoni, A. Paquier, A. Cololuègues, "Un outil d'estimation rapide d'inondation à l'aval d'une digue", *Cemagref, unité de recherche hydrologique-hydraulique, juillet 2004*, 11 pages.
- [38] A. Torres, G. L. Kouyi, J. L. B. Krajewski, A. Paquier, "Modélisation 2D de l'hydrodynamique dans un bassin de retenue- décantation d'eau pluvial", *INSA-Lyon & Cemagref unité de recherche hydrologie-hydraulique 25ème rencontre de l'AUGC, 23-25 mai 2007, Bordeaux*; 8 pages.
- [39] A. Paquier, J. M. Tanguy, S. Haider, B. Zhang, "Estimation des niveaux d'inondation pour une crue éclaircie en milieu urbain : Comparaison de deux modèles hydrodynamiques sur la crue de Nîmes d'octobre 1988", *Cemagref unité de recherche hydrologique-hydraulique & CETE méditerranée Aix-en-Provence & Gradient Groupe université de technologie de Compiègne ; novembre 2002*, 24 pages.
- [40] J.-B. Faure, "MAGE, Présentation du logiciel", *Cemagref unité de recherche hydrologie-hydraulique, mai 2007*, 31 pages.
- [41] CETMEF (Centre d'Études Techniques Maritimes Et Fluviales), "Guide de prise en main de MAS-CARET", 2007, 145 pages.
- [42] K. J. Kouakou, "Instabilités des interfaces écoulement/fond érodable : approches asymptotiques", *thèse de doctorat université de Paris 6, (2005)*, 155 pages.
- [43] N. Guillaume, "Modélisation à base physique des processus de l'érosion hydrique à l'échelle de la parcelle". *Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble 1, 2006*, 332 pages.
- [44] D. L. Mathieu, "Modélisation numérique bidimensionnelle du transport solide et de la dynamique fluviale". *Thèse de doctorat, Université Joseph Fourier Grenoble, 2007*, 150 pages
- [45] S. Sambou, "Contribution à la modélisation des processus hydrologiques sur l'exemple du haut bassin du fleuve Sénégal". *Thèse de doctorat d'état, Université Cheikh Anta Diop Dakar, 2005*, 351 pages
- [46] V. Catherine, "Modélisation du transport littoral", *Laboratoire National d'Hydraulique et Environnement, Electricité de France R & D (EDF, LNHE, HP), 2004*, 10 pages.
- [47] M. Véronique. "Méthode de décomposition de domaine et de couplage pour des problèmes d'évolution", *Université de Paris 13, 2002*, (299-312) pages.
-

- [48] Camara, "Impact des aménagements sur les littorales : l'exemple de l'ouverture de la brèche sur la Langue de Barbarie (Grande côte du Sénégal)", *Université Cheikh Anta Diop Dakar, 2008*, 12 pages.
- [49] B. Roland, "An Adaptative finite element method for the incompressible Navier Stokes equation on time - dependent domains", 1995, 118 page
- [50] R. Tulier, P. André, C. Arnaud, "Un outil d'estimation rapide du risque d'inondation à l'aval d'une digue, Cemagref, 2004", 147-157 pages.
- [51] H. Frédéric, "Maillage 2D, 3D adaptation", *Université Pierre et Marie Curie, 2006*, 97 pages.
- [52] C. Laurent, H. Gaël, "Etude de l'évolution d'une dune de sable dans un écoulement constant", 2004, 26 pages.
- [53] H. Frédéric, "Résolution des EDP par la méthode des éléments finis, cours master 2", *Université Pierre et Marie Curie, 2007*, 133 pages.
- [54] L. Philippe, "Simulation morphodynamique long terme pour la protection du littoral LEGI Grenoble", 2007, 6 pages.
- [55] R. Lionel, M. Hervé, B. Philipe, "Evolution morphodynamique des dunes, couplage écoulement, LEGF", Rapport de recherche, Université Bordeaux (2003), 2 pages.
- [56] H. Hussein, "Simulation d'écoulement et de transports de polluants en milieu poreux : Application à la modélisation de la sûreté des dépôts des déchets radioactifs", *thèse de doctorat, Université Rennes 1, 2002*, 264 pages.
- [57] L. Dominique, "Risques d'obstruction des cours d'eau et débâcles brutales", *Cemagref, unité de recherche érosion torrentielle, neige et avalanche*, 21 pages.
- [58] P. André, Modélisation des écoulements de rivières en crues : pour une utilisation adaptée des équations de Saint-Venant", *Thèse de doctorat, Université Claude Bernard Lyon 1, 2002*, 44 pages.
- [59] S. Jean-Pierre, "Introduction à l'analyse numérique", *notes de cours, Université de Liège, 2005*, 146 pages.
- [60] R. Nicolas, L. Christophe, M. Yannick, "Conditions de drainage d'un matériau granulaire saturé en écoulement, groupe recherche genie civil", *équipe matériaux INSA de Rennes, 2002*, 6 pages.
- [61] N. Goutal, "Résolution des équations de Saint-Venant en régime transcritique par la méthode des éléments finis. Application aux bancs décrouvrants." *Thèse de doctorat de l'Université Paris VI. 1987*
- [62] C. Bernadi, O. Pironneau, "On the shallow water equation at low Reynolds number. Communications in partial differential equations", 16(1), 59-104, 1991
- [63] M. R. Hestenes, E. Stiefel, "Methods of conjugate gradients for solving linear systems". *J. Res. Nat Bur. Standards V49. 1952*
- [64] M. O. Bristeau, and B. Coussin, "Boundary conditions for the shallow water equations solved by kinetic schemes". Rapport de recherche, INRIA. à paraître.

- 
- [65] M. O. Bristeau, and B. Perthame, "Transport of pollutant in shallow water using kinetic schemes." In *ESAIM Proceedings 10, CEMRACS 1999 (2001)*, pp. 9-21. <http://www.emath.fr/Maths/Proc/Vol.10>.
- [66] G. Barrenechea, and F. Valentin. "An unusual stabilized finite element method for a generalized stokes problem". *rapport de recherche 4173, Inria, avril 2001*.
- [67] J-F Gerbeau, and B. Perthame, "Derivation of viscous Saint-Venant system for laminar shallow water : numerical validation". *Discrete and Continuous Dynamical Systems : Series B 1, 1 (2001)*, 89-102 pages.
- [68] C.D. Levermore, M. Sammartino, "A shallow water model with eddy viscosity for basins with varying bottom topography", *Nonlinearity* 14 (2001) 1493-1515.
- [69] F. Marche, "Derivation of a new two-dimensional viscous shallow water model with varying topography, bottom friction and capillary effects", *Eur. J. Mech. B Fluids* 26 (2007) 49-63 pages.
- [70] M. Pedercini, A. T. Patera, M. E. Cruz, "Variational Bound Finite Element Methods for Three-Dimensional Creeping Porous-Media and Sedimentation Flows", *International Journal for Numerical methods in Fluids*, vol. 26, (1998) 145-175 pages
- [71] A. Bouddour, J.-L. Auriault, M. Mhamdi-Alaoui, "Erosion and deposition of solid particles in porous media : Homogenization analysis of a formation damage", *Transport in porous media*, vol. 25, n2, 1996, p. 121-146.
- [72] J. Boussinesq, "Essai sur la théorie des eaux courantes." *Mémoire présenté par divers savants à l'académie des sciences de Paris*, 23, 380-398. 1823.
- [73] C. Navier, "Mémoire sur les lois des fluides". *Mémoires de l'Académie des Sciences*, 6, 380-416. 1823
- [74] G. Stokes, "On the theories of the internal friction of fluids motion and of the equilibrium and motion of the elastic solids." *Trans. Cambridge Phil. Soc.*, 8, 287-305. 1845
- [75] A. J. C. Saint-Venant, "Théorie du mouvement non-permanent des eaux, avec applications aux crues des rivières et à l'introduction des marées dans leur lit." *Compte-Rendu à l'Académie des Sciences de Paris*, 73, 147-157. 1871
- [76] G. Dhatt, G. Touzot, "Une présentation de la méthode des éléments finis." *Collection Université de Compiègne, Presses de l'Université Laval, Québec*. 1981
- [77] C. Frederiksen, A. Watts, "Finite-element method for time-dependent incompressible free surface flow." *Journal of Computational Physics*, 39, 282-304. 1981
- [78] J. P. Benque, G. Labadie, J. Ronat, "Une méthode d'éléments finis pour la résolution des équations de Navier-Stokes couplées à une équation thermique." *Communication au 4ème Symposium International sur les méthodes d'éléments finis pour les problèmes de mécanique des fluides*. 26-29 juillet Tokyo, Japon. 1982
- [79] A.-N. Brooks, T. J. R. Hugues, "Streamline Upwind Petrov Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the Navier-Stokes equations." *Computer Methods in Applied Mechanics and engineering*. 32(1982). 199-259. 1982
-

- 
- [80] Y. Hasbani, E. Livne, M. Bercovier, "finite elements and characteristics applied to advection-diffusion equations." *Computers and fluids. Vol.11, numéro 2*, P.71-83. 1983
  - [81] J.-M Hervouet, "Finite Element algorithms for modelling flood propagation. Modelling of flood propagation over initially dry areas". Milian. Juin 1994
  - [82] J.-M Hervouet, J.-M. Janin, C. Moulin, "Preconditioning and solving linear systems for the computational Methods in Water Resources." Heidelberg. Allemagne. 1994
  - [83] J.-M Hervouet, "A numerical simulation of the Malpasset dam-break with 2D Saint-Venant equation. Proceedings of the Saint-Venant symposium." *Marne la Vallée. France 28-29 August 1997. 1997.*
  - [84] B. Perthame, C. Simeoni, "A kinetic for the Saint-Venant system with a source term." *Rapport de Recherche DMA -01/03 du Département de mathématiques et applications. Ecole Normale Supérieure CNRS UMR 8553 Mai 2001.*
  - [85] M. Astorino, J-F. Gerbeau, O Pantz et K.-F. Traoré, "Fluide structure and multi-body contact. Application to aortic valves." *Rapport de Recherche INRIA. 6583 (2008)*
  - [86] M. Amara, P Destuynder et M. Djaoua, "On a fluide element scheme for plane crack problemes, Numerical Methods in fracture Mechanics." pp. 41-50. 1980
  - [87] I. Babuška, "The finite element method with Lagrange multiplier." *Numer. Math., pp179-192. 1973 Ecole Normale Supérieure CNRS UMR 8553 Mai 2001.*
  - [88] M. Djaoua, "Analyse mathématique et numérique de quelques problèmes en mecanique de rupture.", *Thèse, université Paris VI, 1983.*
  - [89] F.-J. Gallego et J.-J Anza, "A mixed finite element for the elastic problem." *Int. j. Numer. Math; Engrg. pp 1249-1264. 1989.*
  - [90] P. Hansbo, C Lovadina, I Perugia et G. sangalli, "A Lagrange multiplier method for the finite element solution of elliptic interface problem using nonmatching meshes." *Numer. Math., pp 91-115. 2005*
  - [91] J.-L. Lions et G. Stampaccichia, "Variational inequalities." *Comm. Pure. Appli Math., pp 493-519.*
  - [92] G. Strang, "Approximation in the finite element method." *Numer. Math. pp 81-88. 1972.*
  - [93] J. Li, M. Hesse, J. Ziegler, A.W. Woods, An arbitrary Lagrangian Eulerian method for moving-boundary problems and its application to jumping over water /J. Comput. Phys. 208(2005) 289-314
  - [94] D.L. Hu, B. Chan, J.W.M. Bush, The hydrodynamics of water strider locomotion, *Nature* 424 (6949) (2003) 663-666.
  - [95] G. Tryggvason, S.O. Unverdi, Computations of three-dimensional Rayleigh-Taylor instability, *Phys. Fluids A*, 2, (1990), 656-659.
  - [96] S.O. Unverdi, G. Tryggvason, A front-tracking method for viscous, incompressible, multi-fluid flows, *J. Comput. Phys.* 100 (1992)25-37.
-

- 
- [97] C.W. Hirt, B.D. Nichols, Volume of fluid VOF method for the dynamics of free boundaries, *J. Comput. Phys.* 39 (1981) 201-225.
- [98] J. Li, Calcul d'Interface Affine par Morceaux (Piecewise linear interface calculation), *C. R. Acad. Sci. Paris* 320 (IIb) (1995) 391-396.
- [99] D. Gueyffier, J. Li, A. Nadim, R. Scardovelli, S. Zaleski, Volume-of-fluid interface tracking and smoothed surface stress methods applied to multiphase flow and pendant drop pinching, *J. Comput. Phys.* 152 (1999) 423-456.
- [100] R. Scardovelli, S. Zaleski, Direct numerical simulation of free surface and interfacial flow, *Ann. Rev. Fluid Mech.* 31 (1999) 567-604.
- [101] S. Osher, J.A. Sethian, Fronts propagating with curvature-dependent speed : algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations, *J. Comput. Phys.* 79 (1988) 12-49.
- [102] S. Popinet, S. Zaleski, A front-tracking algorithm for the accurate representation of surface tension, *Int. J. Numer. Methods Fluids* 30 (1999) 775-793.
- [103] Y. Renardy, M. Renardy, Prost : a parabolic reconstruction of surface tension for the volume of fluid method, *J. Comput. Phys.* 183, (2002), pp 400-421.
- [104] G. Ryskin, L.G. Leal, Numerical solution of free-boundary problems in fluid mechanics. Part 2 : Buoyancy-driven motion of a gas bubble through a quiescent liquid, *J. Fluid Mech.* 148 (1984) 19-36.
- [105] B. Maury, Direct simulations of 2d fluid-particle flows in bi-periodic domains, *J. Comput. Phys.* 156 (2) (1999) 325-351.
- [106] P. Fast, M.J. Shelley, A moving overset grid method for interface dynamics applied to non-Newtonian hele-shaw flow, *J. Comput. Phys.* 195 (1) (2004) 117-142.
- [107] A.J. Chorin, A numerical method for solving incompressible viscous flow problems, *J. Comput. Phys.* 2 (1967) 12-26.
- [108] M. Rosenfeld, D. Kwak, M. Vinokur, A fractional step solution method for the unsteady incompressible Navier-Stokes equations in generalized coordinate systems, *J. Comput. Phys.* 94 (1991) 102-137.
- [109] F.H. Harlow, J.E. Welsh, Numerical calculation of time-dependent viscous incompressible flow with free surface, *Phys. Fluids* 8, (1965), pp 2182-2189.
- [110] R. Peyret, T.D. Taylor, *Computational Methods for Fluid Flow*, Springer-Verlag, 1990.
- [111] C.M. Rhie, W.L. Chow, A numerical study of the turbulent flow past an isolated airfoil with trailing edge separation, *AIAA-83-0260*, 1983.
- [112] Joel H. Ferziger, M. (Milovan) Peric, *Computational Methods for Fluid Dynamics*, Springer, 1966.
- [113] Y. Zang, R.L. Street, J.R. Koseff, A non-staggered grid fractional step method for time-dependent incompressible Navier-Stokes equations in curvilinear coordinates, *J. Comput. Phys.* 114 (1994) 18-33.
-

- 
- [114] J. Li, Numerical resolution of Navier-Stokes equation with reconnection of interfaces. Volume tracking and application to atomization, PhD thesis, University of Paris VI, 1996.
  - [115] R.L. Sani, P.M. Gresho, "Incompressible Flow and the Finite Element Method", vol. 2, John Wiley, 2000.
  - [116] P.J. Zwart, G.D. Raithby, M.J. Raw, The integrated space-time finite volume method and its application to moving boundary problems, *J. Comput. Phys.* 154, (2), (1999), 497-519.
  - [117] R.S. Bernard, H. Kapitza, How to discretize the pressure gradient for curvilinear MAC grids, *J. Comput. Phys.* (1992), pp 288-298.
  - [118] J.F. Thompson, Z.U.A. Warsi, C.W. Mastin, *Numerical Grid Generation : Foundations and Applications*, North-Holland, 1985.
  - [119] A. Prosperetti, Free oscillations of drops and bubbles : the initial-value problem, *J. Fluid Mech.* 100 (1980) 333-347.
  - [120] L. Fuchs, N. Tillmark, Numerical and experimental study of driven flow in a polar cavity, *Int. J. Numer. Methods Fluids* 5 (1985) 311-329.
  - [121] M. Coutanceau, R. Bouard, Experimental determination of the main features of the viscous flow in the wake of a circular cylinder in uniform translation. Part 1. Steady flow, *J. Fluid Mech.* 79, (1977), pp 231-256.
  - [122] W.M. Collins, S.C.R. Dennis, Flow past an impulsively started circular cylinder, *J. Fluid Mech.* 60, (1973), pp 105-127.
  - [123] H. Lamb, *Hydrodynamics*, Cambridge University Press, 1932.
  - [124] S. Popinet, S. Zaleski, Bubble collapse near a solid boundary : a numerical study of the influence of viscosity, *J. Fluid Mech.* 464, (2002), pp 137-163.
  - [125] L.D. Landau, E.M. Lifshits, *Fluid Mechanics*, Pergamon, Oxford, 1987.
  - [126] H. Press William, A. Teukolsky Saul, T. Vetterling William, P. Flannery Brian, *Numerical Recipes in FORTRAN : The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, 1996.
  - [127] D. Ait-Ali-Yahia, G. Baruzzi, W.G. Habashi, M. Fortin, J. Dompierre and M-G. Vallet. Anisotropic mesh adaptation : towards user-independent, mesh-independent and solver-independent CFD. Part II. Structured grids. *Int. J. Numer. Methods Fluids* 2002, 398, pp 657-673.
  - [128] J.H. Argyris, J. St. Doltsinis, H. Fisher and H. W. Istenberg. *TA ÎÄANTA PEI. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1985, 51(1-3) : pp 289-362.
  - [129] A. Cheng, D. Coutand, and S. Shkoller. Navier-stokes equations interacting with a nonlinear elastic biofluid shell. *SIAM J. Math. Anal.*, Vol 39, 2007, pp 742-800, .
  - [130] D. Coutand and S. Shkoller. Motion of an elastic solid inside of an incompressible viscous fluid. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 176 (1), 2005, pp 25-102.
  - [131] F. Armero and E. Love. An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for finite strain plasticity. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2003, 57(4), pp 471-508.
-

- 
- [132] H. Askes and A. Rodriguez-Ferran. A combined rh-adaptive scheme based on domain subdivision. Formulation and linear examples *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2001, 51(3), pp 253-273.
- [133] H. Askes, A. Rodriguez-Ferran and A. Huerta. Adaptive analysis of yield line patterns in plates with the arbitrary Lagrangian-Eulerian method. *Comput. Struct.* 1999, 70(3), pp 257-271.
- [134] H. Askes and L.J. Sluys. Remeshing strategies for adaptive ALE analysis of strain localisation. *Eur. J. Mech. A-Solids* 2000, 19(3), pp 447-467.
- [135] H. Askes, L.J. Sluys and BBC de Jong. Remeshing techniques for r-adaptive and combined h/r-adaptive analysis with application to 2D/3D crack propagation. *Structural Engineering and Mechanics*, 12(5), 2001, pp 475-490.
- [136] JLF Aymone, E. Bittencourt and G.J. Creus. Simulation of 3D metal forming using an arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method. *J. Mater. Process. Technol.*, 110(2), 2001, pp 218-232.
- [137] FPT Baaijens. An U-ALE formulation of 3-D unsteady viscoelastic flow. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1993, 36(7), pp 1115-1143.
- [138] J.T. Batina. Implicit flux-split Euler schemes for unsteady aerodynamic analysis involving unstructured dynamic meshes. *AIAA Journal* 1991, 29(11), pp 1836-1843.
- [139] T. Belytschko and J.M. Kennedy. Computer methods for subassembly simulation. *Nucl. Eng. Des.* 1978, 49, pp 17-38.
- [140] T. Belytschko, J.M. Kennedy and D.F. Schoeberle. Quasi-Eulerian finite element formulation for fluid-structure interaction. In *Proc. Joint ASME/CSME Pressure Vessels and Piping Conference*, ASME, 1978.
- [141] T. Belytschko, J.M. Kennedy and D.F. Schoeberle. Quasi-Eulerian finite element formulation for fluid-structure interaction. *J. Press. Vessel Technol.-Trans. ASME* 1980, 102, pp 62-69.
- [142] T. Belytschko, D.P. Flanagan and J.M. Kennedy. Finite element methods with user-controlled meshes for fluid-structure interaction. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1982, 33(1-3), pp 669-688.
- [143] T. Belytschko and W.K. Liu. Computer methods for transient fluid-structure analysis of nuclear reactors. *Nuclear Safety* 1985, 26(1), pp 14-31.
- [144] T. Belytschko, W.K. Liu and B. Moran. *Nonlinear Finite Elements for Continua and Structures*. Wiley : Chichester, 2000.
- [145] D.J. Benson. An efficient, accurate, simple ALE method for nonlinear finite element programs. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1989, 72(3), pp 305-350.
- [146] D.J. Benson. Vectorization techniques for explicit ALE calculations. An efficient, accurate, simple ALE method for nonlinear finite element programs. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1992a, 96(3), pp 303-328.
- [147] D.J. Benson. Computational methods in Lagrangian and Eulerian hydrocodes. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1992b, 99(2-3), pp 235-394.
-



- 
- [148] R. Boman and J.P. Ponthot. Numerical simulation of lubricated contact in rolling processes. *J. Mater. Process. Technol.*, 2002, 125-126, pp405-411.
- [149] R. Boman and J.P. Ponthot. Finite elements for the lubricated contact between solids in metal forming processes. *Acta Metallurgica Sinica* 2000, 13(1), pp 319-327.
- [150] J. Bonet and RD Wood. *Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis*. Cambridge University Press : Cambridge, 1997.
- [151] H. Braess and P. Wriggers. Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element analysis of free surface flow. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 2000, 190(1-2), pp 95-110.
- [152] F. Casadei and J.P. Halleux. An algorithm for permanent fluid-structure interaction in explicit transient dynamics. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1995, 128(3-4), pp 231-289.
- [153] F. Casadei and A. Sala. Finite element and finite volume simulation of industrial fast transient fluid-structure interactions. In *Proceedings European Conference on Computational Mechanics - Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering*, Wunderlich W (ed). TU M Ìnchen, Germany, 1999.
- [154] F. Casadei, J.P Halleux, A. Sala and F. Chill, Transient fluid-structure interaction algorithms for large industrial applications. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 2001, 190(24-25), pp 3081-3110.
- [155] F. Casadei and S. Potapov, Title of paper *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 2004, to appear in the Special Issue on the ALE formulation
- [156] M.J. Castro-Diaz, H. Bourouchaki, P.L. George, F. Hecht, B. Mohammadi. Anisotropic adaptative mesh generation in two dimensions for CFD. *Proceedings of the Third ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference*, Paris, 9-13 September, 1996, pp 181-186.
- [157] J.P Cescutti, E. Wey and J.L. Chenot. Finite element calculation of hot forging with continuous remeshing. In *Modelling of metal forming processes*, EUROMECH-233, Chenot JL, O Ìate E (eds). Sophia-Antipolis, France, 1988, pp 207-216.
- [158] J.L. Chenot and M. Bellet. The ALE method for the numerical simulation of material forming processes. In *Simulation of Materials Processing : Theory, Methods and Applications - NUMIFORM 95*, Shen SF, Dawson P (eds). Ithaca, New-York, 1995, pp 39-48.
- [159] J. Donea, P. Fasoli-Stella, and S. Giuliani. Lagrangian and Eulerian finite element techniques for transient fluid-structure interaction problems. In *Trans. 4th Int. Conf. on Structural Mechanics in Reactor Technology*, Paper B1/2, San Francisco, California, USA, 1977.
- [160] J. Donea, S. Giuliani, and J.P Halleux. An Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1982, 33(1-3), pp 689-723.
- [161] J. Donea, Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element methods. In *Computational Methods for Transient Analysis*, Belytschko T, Hughes TJR (eds). North-Holland : Amsterdam, 1983, pp 474-516.
-

- 
- [162] J. Donea and A. Huerta. Finite Element Methods for Flow Problems. Wiley : Chichester, 2003.
- [163] L.E. Eriksson LE. Practical three-dimensional mesh generation using transfinite interpolation. SIAM J. Sci. Stat. Comput. 1985, 6(3), pp 712-741.
- [164] C. Farhat, Ph Geuzaine and C Grandmont. The discrete geometric conservation law and the nonlinear stability of ALE schemes for the solution of flow problems on moving grids. J.Comput. Phys. 2001, 174(2), pp 669-694.
- [165] M. Fortin, M-G, Vallet, J. Dompierre, Y. Bourgault, W.G Habashi. Anisotropic mesh adaptation :Theory, validation and applications. Proceedings of the Third ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference, Paris, France, 9-13 September, 1996, pp 174-180.
- [166] R.M. Franck and R.B Lazarus. Mixed Eulerian-Lagrangian method. In Methods in Computational Physics, Vol. 3 : Fundamental methods in Hydrodynamics Alder B, Fernbach S, Rotenberg M (eds). Academic Press : New York, 1964.
- [167] M.S Gadala and J. Wang ALE formulation and its application in solid mechanics. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 1998, 167(1-2), pp 33-55.
- [168] M.S Gadala and J. Wang, Simulation of metal forming processes with finite element methods. Int. J. Numer. Methods Eng. 1999, 44(10), pp 1397-1428.
- [169] M.S Gadala, M.R Movahhedy and J. Wang, On the mesh motion for ALE modeling of metal forming processes. Finite Elem. Anal. Des. 2002, 38(5), pp 435-459.
- [170] S. Ghosh, Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element analysis of large deformation in contacting bodies. Int. J. Numer. Methods Eng. 1992, 33(9), pp 1891-1925.
- [171] S. Ghosh and N. Kikuchi, An Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for large deformation analysis of elastic-viscoplastic solids. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 1991, 86(2), pp 127-188.
- [172] S. Ghosh and S. R-S Raju, adapted Arbitrary Lagrangian Eulerian finite element method for metal-forming problems with strain localization. Int. J. Numer. Methods Eng. 1996, 39(19), pp 3247-3272.
- [173] S. Giuliani, An algorithm for continuous rezoning of the hydrodynamic grid in Arbitrary Lagrangian-Eulerian computer codes. Nucl. Eng. Des. 1982, 72, pp 205-212.
- [174] W.J. Gordon and CH. Hall, Construction of curvilinear co-ordinate systems and applications to mesh generation. Int. J. Numer. Methods Eng. 1973, 7(4), pp 461-477.
- [175] H. Guillard and C. Farhat, On the significance of the geometric conservation law for flow computations on moving meshes. Comput. Meth. Appl. Mech. Eng. 2000, 190(11-12), pp 1467-1482.
- [176] WG. Habashi, M. Fortin, M-G Vallet, J. Dompierre, Y. Bourgault, D. Ait-Ali-Yahia. Anisotropic mesh adaptation : towards user-independent, mesh-independent and solver-independent CFD solutions. Part I : Theory. Int. J. Numer. Methods Fluids 2000, 32(6), pp 725-744.
-

- 
- [177] R. Haber and J.F. Abel. Discrete transfinite mappings for the description and meshing of three-dimensional surfaces using interactive computer graphics. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1982, 18(1), pp 41-66.
- [178] RB. Haber, A mixed Eulerian-Lagrangian displacement model for large-deformation analysis in solid mechanics. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1984, 43(3), pp 277-292.
- [179] RB. Haber and BH. Hariandja. Computational strategies for nonlinear and fracture mechanics problems. An Eulerian-Lagrangian finite element approach to large deformation frictional contact. *Comput. Struct.* 1985, 20(1-3), pp 193-201.
- [180] J. Hermansson and P. A Hansbo variable diffusion method for mesh smoothing. *Commun. Numer. Methods Eng.* 2003, 19(11), pp 897-908.
- [181] CW. Hirt, AA. Amsden, JL. Cook. An Arbitrary Lagrangian-Eulerian computing method for all flow speeds. *J. Comput. Phys.* 1974, 14, 227 à 253. Reprinted in *J. Comput. Phys.* 1997, 135(2), pp 203-216.
- [182] M. Hogge and JP. Ponthot, Metal forming analysis via Eulerian-Lagrangian FEM with adaptive mesh. *Latin American Research* 1991, 21, pp 217-224.
- [183] YK. Hu and WK. Liu. ALE finite element formulation for ring rolling analysis. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1992, 33(6), pp 1217-1236.
- [184] Hu and WK. Liu, An ALE hydrodynamic lubrication finite element method with application to strip rolling. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1993, 36(5), pp 855-880.
- [185] YK. Hu YK and Liu WK. Finite element hydrodynamic friction model for metal forming. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1994, 37(23), pp 4015-4037.
- [186] A. Huerta and WK. Liu. Viscous flow structure interaction. *J. Press. Vessel Technol.-Trans. ASME* 1988a, 110(1), pp 15-21.
- [187] A. Huerta and WK. Liu. Viscous flow with large free-surface motion. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1988b, 69(3), pp 277-324.
- [188] A. Huerta and WK Liu. ALE formulation for large boundary motion. In *Trans. 10th Int. Conf. Structural Mechanics in Reactor Technology*, Vol. B, Anaheim, California, USA, 1989, pp 335-346.
- [189] A Huerta and WK Liu. Large amplitude sloshing with submerged blocks. *J. Press. Vessel Technol.-Trans. ASME* 1990, 112, pp 104-108.
- [190] A Huerta and F. Casadei. New ALE applications in non-linear fast-transient solid dynamics. *Eng. Comput.* 1994, 11(4), pp 317-345.
- [191] A Huerta, A. Rodriguez-Ferran, J. Sarrate. Adaptive finite element strategies based on error assessment. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1999, 46(10), pp 1803-1818.
- [192] J Hu Îtink, PT Vreede, J. van der Lugt. Progress in mixed Eulerian-Lagrangian finite element simulation of forming processes. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1990, 30(8), pp 1441-1457.
-

- 
- [193] TJR Hughes, WK Liu and TK Zimmermann. Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows. U.S.-Japan Seminar on Interdisciplinary Finite Element Analysis, Cornell Univ., Ithaca, NY, 1978.
- [194] TJR Hughes, Liu WK and Zimmermann TK. Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1981, 29(3), pp 329-349.
- [195] HM Koh and RB Haber. Elastodynamic formulation of the Eulerian-Lagrangian kinematic description. *J. Appl. Mech.-Trans. ASME* 1986, 53(4), pp 839-845.
- [196] HM Koh, HS Lee and RB Haber. Dynamic crack propagation analysis using Eulerian-Lagrangian kinematic descriptions. *Comput. Mech.* 1988, 3, pp 141-155.
- [197] B. Koobus and C. Farhat. Second-order accurate and geometrically conservative implicit schemes for flow computations on unstructured dynamic meshes. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1999, 170(1-2), pp 103-129.
- [198] TA Laursen. *Computational Contact and Impact Mechanics*. Springer : Berlin, 2002.
- [199] M Lesoinne and C. Farhat. Geometric conservation laws for flow problems with moving boundaries and deformable meshes, and their impact on aeroelastic computations. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1996, 134(1-2), pp 71-90.
- [200] P. Le Tallec and C. Martin. A nonlinear elasticity model for structured mesh adaptation. In *Proceedings of the Third ECCOMAS Computational Fluid Dynamics Conference*, Paris, France, 1996, 174-180.
- [201] P. Le Tallec and J. Mouro, Fluid-structure interaction with large structural displacements. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 2001, 190(24-25), pp 3039-3067.
- [202] RJ. Le Veque. *Numerical Methods for Conservation Laws*. Lectures in Mathematics, ETH Z Ærich. Birkh user Verlag :Basel, 1990.
- [203] WK Liu and Chang HG. A method of computation for fluid structure interaction. *Comput. Struct.* 1985, 20 (1-3), pp 311-320.
- [204] WK Liu and Chang HG. Efficient computational procedures for long-time duration fluid-structure interaction problems. *J. Press. Vessel Technol.-Trans. ASME* 1984, 106, pp 317-322.
- [205] WK Liu, T Belytschko and H. Chang. An arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for path-dependent materials. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1986, 58(2), pp 227-245.
- [206] WK Liu, H. Chang, JS. Chen and T. Belytschko. Arbitrary Lagrangian-Eulerian Petrov-Galerkin finite elements for nonlinear continua. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1988, 68(3), pp 259-310.
- [207] WK Liu, JS Chen, T. Belytschko and YF. Zhang. Adaptive ALE finite elements with particular reference to external work rate on frictional interface. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1991, 93(2), pp 189-216.
- [208] WK Liu and J. Gvildys. Fluid-structure interaction of tanks with an eccentric core barrel. *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.* 1986, 58 (1), pp 51-77.
-

- 
- [209] R Lihner R and Yang C. Improved ALE mesh velocities for moving bodies. *Commun. Numer. Methods Eng.* 1996, 12(10), pp 599-608.
  - [210] LW Malvern. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall : Englewood Cliffs, New Jersey, USA, 1969.
  - [211] F. Martinet and P. Chabrand, Application of ALE finite element method to a lubricated friction model in sheet metal forming. *Int. J. Solids Struct.* 2000, 37(29), pp 4005-4031.
  - [212] J-D M Îller J-D. Anisotropic adaptation and multigrid for hybrid grids. *Int. J. Numer. Methods Fluids* 2002, 40(3-4), pp 445-455.
  - [213] WF. Noh. CEL :A time-dependent two-space dimensional coupled Eulerian-Lagrangian code. In *Methods in Computational Physics*, Vol. 3, Alder B, Fernbach S, Rotenberg M (eds). Academic Press : New York, 1964.
  - [214] T. Nomura and TJR. Hughes. An Arbitrary Lgrangian-Eulerian finite element method for interaction of fluid and a rigid body. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1992, 95(1), pp 115-138.
  - [215] A. P Îrez-Foguet A, Rodriguez-Ferran A and Huerta A. Efficient and accurate approach for powder compaction problems. *Comp. Mech.* 2003, 30(3), pp 220-234.
  - [216] G. Pijaudier-Cabot, Î L Bod, A. Huerta. Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element analysis of strain localization in transient problems. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1995, 38(24), pp 4171-4191.
  - [217] JP Ponthot and T. Belytschko. Arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation for element-free Galerkin method. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1998, 152(1-2), pp 19-46.
  - [218] JP. Ponthot and M. Hogge. The use of the Eulerian-Lagrangian FEM in metal forming applications including contact and adaptive mesh. In *Advances in Finite Deformation Problems in Material Processing*, Chandra, Reddy JN (eds). ASME Winter Annual Meeting, ASME AMD-125, Atlanta, 1991, pp 44-64.
  - [219] WE. Pracht. Calculating three-dimensional fluid flows at all flow speeds with an Eulerian-Lagrangian computing mesh. *J. Comput. Phys.* 1975, 17, pp 132-159.
  - [220] B. Ramaswamy and M. Kawahara. Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for unsteady, convective, incompressible viscous free surface fluid flow. *Int. J. Numer. Methods Fluids* 1987, 7(10), pp 1053-1075.
  - [221] A. Rodriguez-Ferran, F. Casadei, A. Huerta. ALE stress update for transient and quasistatic processes. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 1998, 43(2), pp 241-262.
  - [222] A. Rodriguez-Ferran, A. P Îrez-Foguet and A. Huerta. Arbitrary Lagrangian-Eulerian (ALE) formulation for hyperelastoplasticity. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2002, 53(8), pp 1831-1851.
  - [223] J. Sarrate and A. Huerta. An improved algorithm to smooth graded quadrilateral meshes preserving the prescribed element size. *Commun. Numer. Methods Eng.* 2001, 17(2), pp 89-99.
  - [224] Sarrate J, Huerta A and Donea J. Arbitrary Lagrangian-Eulerian formulation for fluid rigid-body interaction. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 2001, 190(24-25), pp 3171-3188.
-

- 
- [225] PJG Schreurs, FE Veldpaus and WAM Brekelmans. Simulation of forming processes using the Arbitrary Eulerian-Lagrangian formulation. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1986, 58(1), pp 19-36.
- [226] M. Souli, JP. Zolesio. Arbitrary Lagrangian-Eulerian and free-surface methods in fluid mechanics. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 2001, 191(3-5), pp 451-466.
- [227] RW Smith. AUSM(ALE) : a geometrically conservative Arbitrary Lagrangian-Eulerian flux splitting scheme. *J. Comput. Phys.* 1999, 150(1), pp 268-286.
- [228] JY Tr panier, M Reggio, M. Paraschivoiu, R Camarero. Unsteady Euler solutions for arbitrarily moving bodies and boundaries. *AIAA Journal* 1993, 31(10), pp 1869-1876.
- [229] JG. Trulio. Theory and structure of the AFTON codes. Report AFWL-TR-66-19, Air Force Weapons Lab., 1966.
- [230] T.J. Willmore. Total curvature in riemannian geometry. Ellis Horwood Series Mathematics and its applications, 1982.
- [231] MJ Van Haaren, HC Stoker, AH van den Boogaard and J. Hu tink, The ALE method with triangular elements : Direct convection of integration point values. *Int. J. Numer. Methods Eng.* 2000, 49(5), pp 697-720.
- [232] AM. Winslow. Equipotential zoning of two-dimensional meshes. Report UCRL-7312, University of California, Lawrence Radiation Laboratory, 1963.
- [233] P. Wriggers. *Computational Contact Mechanics*. Wiley : Chichester, 2002.
- [234] T. Yamada and F. Kikuchi. An Arbitrary Lagrangian-Eulerian finite element method for incompressible hyperelasticity. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 1993, 102(2), pp 149-177.
- [235] Q. Zhang and T. Hisada. Analysis of fluid-structure interaction problems with structural buckling and large domain changes by ALE finite element method. *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.* 2001, 190(48), pp 6341-6357.
- [236] Zhong ZH. *Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems*. Oxford University Press : Oxford, 1993.

